ÉTUDES

CRISTALLOGRAPHIQUES,

PAR

M. AUGUSTE BRAVAIS,

MEMBRE DE L'INSTITUT (ACADÉMIE DES SCIENCES).



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1866

AVERTISSEMENT.

Les Études cristallographiques de M. Auguste Bravais n'ont pu avoir jusqu'à présent qu'un nombre de lecteurs assez restreint parce qu'elles sont disséminées dans deux Recueils différents. Des amis de la science ont pensé qu'il serait utile de les réunir pour les mettre plus commodément à la portée des Minéralogistes et des Physiciens. Le présent volume, qui les renferme toutes dans leur ordre naturel, est modelé sur un volume semblable dont M. de Senarmont avait rassemblé et fait relier les feuilles pour son usage personnel. La Table des matières est copiée sur celle que le savant Professeur de Minéralogie de l'École impériale des Mines avait écrite, de sa main, en tête de cet exemplaire unique recueilli, à la vente de sa bibliothèque, par M. de Chancourtois. On y a ajouté seulement les deux Rapports faits à l'Académie des Sciences par M. Cauchy, sur les Travaux cristallographiques de M. Bravais, et un fragment de son Éloge, lu devant l'Académie, dans sa séance publique du 6 février 1865.

É. D. B.

*Fragment de l'Éloge historique d'*Auguste Bravais, *lu devant l'Académie des Sciences, dans sa séance publique du 6 février* 1865, *par* M. Élie de Beaumont, *Secrétaire perpétuel.*

« En Laponie et sur le mont Blanc, M. Bravais avait eu de nombreuses occasions d'observer les formes cristallines de la neige. Il avait souvent rencontré d'admirables cristallisations d'eau congelée et les avait toujours décrites avec une prédilection particulière. Dans son *Mémoire sur les halos,* il emploie les notations et les formules qui représentent le système cristallin de la glace, en homme qui les connaît parfaitement et qui en comprend à fond le principe. Mais il ne s'arrêta pas là, et ses études finirent par embrasser la Cristallographie tout entière.

» A ses yeux les cristaux sont des *assemblages* de molécules identiques entre elles et semblablement orientées, qui, réduites par la pensée à un point unique, leur centre de gravité, sont disposées en rangées rectilignes et parallèles, dans chacune desquelles la distance de deux points est constante.

» Les points d'un *assemblage* sont alignés en *rangées* suivant une infinité de directions diverses; mais la connaissance de trois rangées non parallèles et non comprises dans un même plan suffit pour déterminer complétement l'*assemblage* dont elles font partie. On peut concevoir une infinité d'*assemblages* entièrement différents. Une étude mathématique approfondie fait découvrir à M. Bravais les degrés de symétrie plus ou moins grands dont ils sont susceptibles. Il trouve les *axes* et les *plans de symétrie* qu'ils peuvent présenter. Il établit que, suivant le nombre et la disposition de ces *axes* et *plans de symétrie,* les *assemblages* qui en possèdent se divisent en *six classes*. En y joignant les assemblages *asymétriques,* où il n'existe ni axes ni plans de symétrie, on a sept classes d'*assemblages :* ce sont là les bases les plus simples et les plus générales des lois de symétrie qu'on observe dans les

cristaux. On doit admettre dans la Cristallographie *sept systèmes cristallins*. M. Haüy l'avait entrevu; mais il avait pensé qu'on pouvait confondre deux des systèmes en un seul, et après lui tous les cristallographes avaient admis *six systèmes cristallins* seulement. M. Bravais *démontre* qu'il faut revenir au nombre *sept*, et cette démonstration, accompagnée de toutes les lumières qui résultent d'une analyse géométrique aussi approfondie que la sienne, ne sont pas une addition médiocre à l'immortelle création d'Haüy. Lagrange et Laplace avaient suivi, en 1784, les leçons de l'ingénieux scrutateur des cristaux, mais ils s'étaient bornés à l'admirer. Les fondements de la belle science, due à son génie, n'avaient jamais été étudiés de si haut et avec autant de généralité que dans le *Mémoire de M. Bravais sur les systèmes formés par des points*, Mémoire auquel notre illustre Cauchy a donné, dans un remarquable Rapport, sa sanction la plus entière.

» Vous n'attendez pas de moi, Messieurs, que j'entre ici dans le détail des procédés aussi simples que rigoureux par lesquels, dans un second Mémoire intitulé : *Études cristallographiques*, remplaçant des règles empiriques par des théorèmes de Géométrie, M. Bravais déduit de ses résultats fondamentaux toutes les formules des cristallographes, avec cette facilité merveilleuse qui dénote presque infailliblement la solution radicale des difficultés d'un sujet. Je me bornerai à dire que dans la deuxième Partie de ce Mémoire, cessant de regarder les molécules comme des points et les considérant comme de petits corps, qu'il appelle *polyèdres atomiques*, il étudie et il éclaircit les rapports qui existent entre ces derniers et les *systèmes cristallins*. Il réduit à des lois simples le phénomène, jusqu'ici presque mystérieux, de l'*hémiédrie*, sur lequel notre savant confrère M. Delafosse, dans un Mémoire justement célèbre, avait déjà répandu des lumières inattendues. M. Bravais démontre qu'il pourrait se présenter trente-cinq cas d'hémiédrie. On n'en avait encore découvert que onze, qui du reste avaient amplement suffi pour exercer pendant longtemps la sagacité des cristallographes.

» Sans oublier le *dimorphisme*, l'un des titres de gloire de Mitscherlich, ni les découvertes curieuses déjà faites à cette époque par notre ingénieux confrère M. Pasteur, M. Bravais, dans une troisième Partie, s'occupe également avec succès des *macles* et des *hémitropies* qui avaient été, de leur côté, une des pierres d'achoppement de la Cristallographie.

» Vers l'époque où il rédigea ses travaux sur l'Optique atmosphérique et sur la cristallisation, M. Bravais composa en outre un grand nombre de Mémoires sur des sujets tout à fait différents et relatifs pour la plupart à la Météorologie, bien que quelques-uns d'entre eux, et ce ne sont pas les moins remarquables, soient en dehors de cette branche de la Géographie physique.

» Il était doué, en effet, d'une admirable facilité pour toute espèce de travail intellectuel, et il possédait l'aptitude si rare de pouvoir s'occuper à la fois des sujets les plus variés : Hydrographie, Navigation, Astronomie, Optique atmosphérique, Physique proprement dite, Géométrie, Cristallographie, Analyse pure, Sciences naturelles; on pourrait presque dire de lui, malgré l'apparente opposition des mots, que l'universalité était sa spécialité.

» Tous ses Mémoires ont été honorablement accueillis dans nos *Comptes rendus,* ou publiés, avec un succès mérité, dans les Recueils scientifiques les plus estimés. Ils renferment constamment des aperçus ingénieux et souvent d'une grande profondeur; mais, pressé par le temps, je ne puis les énumérer en ce moment. L'œuvre de Bravais, prise dans sa totalité, est d'une étendue immense, et il a fallu me borner à en esquisser les traits principaux. De même qu'un astronome, obligé de donner une idée abrégée du firmament, ne pourrait parler en détail que des étoiles de première grandeur, j'ai dû presque me contenter de rappeler ceux des travaux de M. Bravais qui sont devenus ses titres principaux aux suffrages de l'Académie.

» Par son travail sur la Cristallographie, M. Bravais avait associé son nom à celui de notre immortel Haüy; par son ascension sur le mont Blanc, il l'avait associé à celui de Saussure. Dans ses travaux de Laponie, il était le digne continuateur des voyages célèbres de Léopold de Buch et des profondes études de Hansteen. Ses *Mémoires sur les halos, sur les parhélies, sur l'arc-en-ciel blanc,* complétaient de la manière la plus heureuse les théories de Mariotte, de Huygens, de Descartes même et de Newton : le nom de M. Bravais ne pouvait plus, Messieurs, rester longtemps éloigné des vôtres. »

NOTE

SUR

LES POLYÈDRES SYMÉTRIQUES DE LA GÉOMÉTRIE.

NOTE

SUR

LES POLYÈDRES SYMÉTRIQUES DE LA GÉOMÉTRIE,

PAR M. A. BRAVAIS,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

On dit que deux polyèdres sont symétriques, lorsqu'ils ont été construits semblablement l'un au-dessus, l'autre au-dessous d'un plan, avec la condition, pour leurs sommets homologues, d'être également distants du plan, et sur une même droite normale à ce plan. (LEGENDRE, *Géométrie,* liv. 6.)

Je nommerai polyèdres *inverses* deux polyèdres dont les sommets homologues sont également distants d'un point donné et situés sur une même droite passant par ce point, mais de côtés opposés.

Je désignerai par P le premier polyèdre, supposé donné, et par p son inverse. On voit que, réciproquement, P sera l'inverse de p.

Je nommerai *pôle de symétrie* des deux polyèdres le point par lequel passent toutes les droites joignant deux à deux les sommets homologues des deux polyèdres.

Si l'on considère les deux polyèdres P, p comme formant un polyèdre unique (P, p), ce même point sera dit *centre de symétrie* du polyèdre (P, p).

THÉORÈME I. — *Lorsque le pôle de symétrie du polyèdre fixe* P *se déplace, son inverse p se change en un nouvel inverse p′, et l'on peut toujours transporter p sur p′ par un mouvement de translation commun à tous les sommets.*

Soient C, *fig.* 1, *Pl. I,* le premier pôle de symétrie et C′ le deuxième;

c.

soit S un sommet quelconque du polyèdre fixe P; soient s son homologue avant le déplacement de C, et s' son homologue après ce déplacement.

De $Cs = CS$, $C's' = C'S$ on déduit $ss' = 2CC'$; de plus, ss' est parallèle à CC'. Soient de même t, t' les deux positions successives d'un autre sommet du polyèdre inverse; on aurait aussi $tt' = 2CC'$, tt' parallèle à CC'. Donc, si l'on transporte le polyèdre p en le faisant mouvoir, de C vers C', parallèlement à CC', et d'une quantité égale à $2CC'$, il viendra coïncider avec le polyèdre p'. *C. Q. F. D.*

Corollaire. — Il suit de là qu'un polyèdre P étant donné, son inverse est complétement déterminé quant à sa forme et aussi quant à la direction de ses parties par rapport à l'espace absolu; toutefois le lieu qu'il doit occuper reste indéterminé, et dépend de la position du pôle de symétrie.

THÉORÈME II. — *Dans deux polyèdres inverses, les faces homologues sont égales chacune à chacune, et l'inclinaison de deux faces adjacentes, dans un de ces solides, est égale à l'inclinaison des faces homologues dans l'autre.*

Ce théorème se démontrerait, comme la proposition II du livre 6 de LEGENDRE, en substituant des triangles opposés par le sommet aux trapèzes de même base employés dans la démonstration; mais on peut l'obtenir plus simplement de la manière suivante :

Soit proposé de démontrer que les arêtes, angles plans et angles dièdres qui composent l'angle solide S, *fig.* 2, sont les mêmes que leurs homologues dans le polyèdre inverse. Le choix du pôle de symétrie étant arbitraire, prenons S pour pôle; prolongeons les arêtes SM, SN, SP, SQ, de $Sm = SM$, $Sn = SN$, $Sp = SP$, $Sq = SQ$, etc. Les deux angles solides opposés auront évidemment leurs arêtes égales deux à deux par construction, leurs angles plans égaux deux à deux comme opposés par le sommet, et leurs angles dièdres pareillement égaux comme opposés au sommet; or ces arêtes, angles plans ou angles dièdres sont homologues dans le polyèdre et dans son inverse. La même démonstration peut s'appliquer à tous les angles solides, par conséquent à toutes les arêtes, à tous les angles plans et à tous les angles dièdres : donc les faces sont égales et également inclinées de part et d'autre. *C. Q. F. D.*

THÉORÈME III. — *Si l'on fait tourner de deux angles droits le polyèdre p inverse de* P *autour d'une droite passant par le pôle de symétrie* C, *le polyèdre p′ ainsi obtenu sera le symétrique de* P *par rapport au plan mené par* C *normalement à l'axe de rotation.*

Soient NN′, *fig.* 3, la droite donnée et QCQ′ son plan normal passant par C; soient S un sommet quelconque du polyèdre P, et *s* son homologue dans le polyèdre inverse. De *s* abaissez la perpendiculaire *sr* sur NN′ et prolongez-la en *s′*, à une distance $rs' = rs$. Il est visible qu'après un demi-tour effectué autour de NN′, *s* viendra en *s′*. Joignons S et *s′*. Puisque l'on a $sC = CS$, $sr = rs'$, S*s′* sera parallèle à NN′, et, par conséquent, normale au plan QQ′. Si R est le point de rencontre de S*s′* avec le plan QQ′, la droite CR sera normale à NN′, et, par conséquent, parallèle à *ss′*; or on a $sC = CS$, donc aussi $SR = Rs'$. Donc *s′* est le sommet homologue de S dans le polyèdre construit symétriquement par rapport à P au-dessous du plan QQ′. Il en serait de même pour tout autre sommet du polyèdre P; donc une rotation de deux angles droits autour de NN′ amènera l'inverse *p* en coïncidence avec le symétrique *p′* de P par rapport au plan QQ′. *C. Q. F. D.*

Scolie. — Le plan QCQ′ peut être appelé plan de symétrie du polyèdre (P, *p′*) considéré comme un polyèdre unique.

THÉORÈME IV. — *Réciproquement, le symétrique p′ de* P *par rapport au plan quelconque* QQ′, *en tournant de deux droits autour d'une normale au plan, devient l'un des inverses de* P, *et le pôle de symétrie est situé au point de rencontre* C *du plan et de l'axe de rotation.*

Car si l'on construit l'inverse *p*, en prenant C pour pôle de symétrie, *p* et *p′* peuvent être amenés à coïncidence, *p* sur *p′*, ou *p′* sur *p*, par une rotation de deux angles droits autour de NN′.

Corollaire 1. — Il résulte des deux théorèmes précédents que les divers polyèdres symétriques de P ne sont autre chose, quant à leur forme, que son polyèdre inverse, et sont, quant à la direction de leurs parties, les divers polyèdres obtenus par des demi-révolutions de l'inverse *p*, effectuées autour d'axes arbitrairement choisis.

Deux polyèdres inverses d'un polyèdre donné P sont toujours semblablement tournés dans l'espace. Il n'en est pas de même de deux polyèdres symétriques de P, à moins que les deux plans de symétrie qui les déterminent ne soient parallèles entre eux.

Corollaire II. — Deux polyèdres symétriques de P par rapport à deux plans arbitrairement choisis peuvent toujours être superposés; car ils peuvent tous les deux être superposés à un polyèdre inverse de P.

Théorème V. — *Dans deux polyèdres symétriques, les faces homologues sont égales chacune à chacune, etc.* (Le reste comme au théorème II.)

C'est la proposition II du livre 6 de Legendre; elle devient évidente, puisque le symétrique est toujours susceptible de coïncider avec l'inverse, et que l'inverse jouit, par rapport au polyèdre primitif, des propriétés ici énoncées, en vertu de notre théorème II.

Du reste, la démonstration de ce théorème est rendue inutile.

Théorème VI. — *Deux angles solides opposés par le sommet sont inverses l'un de l'autre.*

En effet, le sommet commun est leur pôle de symétrie.

Théorème VII. — *Le plan qui passe par deux arêtes opposées d'un parallélipipède le divise en deux prismes inverses, et les angles solides opposés sont inverses l'un de l'autre.*

On démontre d'abord que les diagonales se coupent au même point; ce point est donc le centre de symétrie du parallélipipède.

Si l'on considère alors les deux prismes comme deux polyèdres distincts, le centre de symétrie devient un pôle de symétrie; donc les angles solides opposés sont inverses ainsi que les deux prismes. (Propositions V et VI du livre 6 de la *Géométrie* de Legendre.)

Théorème VIII. — *Sur la sphère, chaque polygone sphérique* P *a son inverse p, dont les sommets sont diamétralement opposés à ceux du polygone donné. Si l'on fait tourner p de 180 degrés autour d'un diamètre de la*

sphère, le nouveau polygone sera symétrique du polygone P *par rapport au plan du grand cercle normal au diamètre choisi pour axe de rotation.*

Cela résulte de ce que le centre de la sphère est pris pour pôle de symétrie.

Réciproquement, tout polygone symétrique du polygone sphérique P peut être amené à coïncider avec son inverse p, par une demi-révolution autour du diamètre normal au plan de symétrie.

MÉMOIRE

SUR

LES POLYÈDRES DE FORME SYMÉTRIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LES POLYÈDRES DE FORME SYMÉTRIQUE,

PAR M. A. BRAVAIS,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Dans les recherches que nous allons faire sur les polyèdres, nous ferons abstraction de leurs faces et de leurs arêtes pour ne considérer que leurs sommets, de sorte que tout polyèdre sera pour nous une agrégation de points distincts, de nombre limité, et distribués d'une certaine manière autour de leur centre de gravité.

Définition I. — Je nommerai *centre de symétrie* d'un polyèdre un point C, *fig.* 1, *Pl. I,* tel, qu'en le joignant à un sommet quelconque S du polyèdre et prolongeant CS d'une quantité égale à elle-même, le point *s* ainsi obtenu soit aussi un sommet du polyèdre; ce point *s* sera l'*homologue* de S par rapport au centre C.

THÉORÈME I. — *Dans tout polyèdre limité, il ne peut exister qu'un centre de symétrie.*

Cette proposition est évidente.

Définition II. — Je nommerai *axe de symétrie* d'un polyèdre une droite AB, *fig.* 1, telle, qu'en faisant tourner le polyèdre d'un angle Q autour de AB, les nouveaux lieux des sommets coïncident avec les anciens. Si, par exemple, cette rotation amène le sommet S en S', S' devra aussi être le lieu d'un sommet du polyèdre, et alors S, S' seront dits *homologues l'un de l'autre,* par rapport à l'axe AB.

d.

THÉORÈME II. — *L'angle qui restitue les lieux des sommets d'un polyèdre, dans sa rotation autour d'un axe de symétrie, est toujours commensurable avec* 360 *degrés.*

En effet, soit S', *fig.* 1, un homologue de S par rapport à l'axe AB : par S, S' menez un plan normal à AB, et qui coupera cet axe en c; de c, avec le rayon cS, décrivez une circonférence de cercle, sur laquelle vous prendrez

$$\text{arc}\, S''S' = \text{arc}\, SS', \quad \text{arc}\, S'''S'' = \text{arc}\, SS', \text{ etc.}$$

Pendant que la rotation entraînera S de S en S', le sommet S', participant à ce mouvement, viendra en S'' qui devra être aussi le lieu d'un sommet ; ainsi, non-seulement S, S' seront des sommets du polyèdre, mais il en sera de même de S'', et des autres points S''',... obtenus par la même voie. En répétant ainsi l'arc SS', on doit, après un ou plusieurs tours, revenir au point de départ S ; sans cela le nombre des sommets serait illimité, ce qui ne peut être. Donc on aura, en nommant K l'angle SCS', p et q deux nombres entiers, premiers entre eux,

$$K = \frac{p}{q}\, 360^\circ.$$

Corollaire. — Le plus petit des angles de rotation capables de restituer les lieux des sommets est $\frac{360^\circ}{q}$. En effet, l'expression générale de ces angles est

$$mK - n.\, 360^\circ = \frac{mp - nq}{q}\, 360^\circ,$$

m et n étant des nombres entiers; or on peut toujours déterminer m et n d'après la condition

$$mp - nq = \pm 1;$$

donc, etc.

Définition III. — On peut donc définir l'*axe de symétrie* une droite telle, qu'en faisant tourner le polyèdre autour d'elle, d'une partie aliquote $\frac{1}{q}$ de 360 degrés, la position apparente des sommets du polyèdre ne soit point troublée.

Le dénominateur q sera appelé le *numéro d'ordre de la symétrie de l'axe.* Si l'on a $q = 2$, l'axe sera dit *axe de symétrie du deuxième ordre,* ou *axe de symétrie binaire,* ou, plus simplement, *axe binaire.* Si l'on a $q = 3, 4, \ldots$, l'axe sera dit *ternaire, quaternaire,....* Dans ces divers cas, il y aura restitution des lieux des sommets après $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ de tour.

Définition IV. — Je nommerai *plan de symétrie* du polyèdre un plan PQ, *fig.* 1, tel, qu'en abaissant d'un sommet quelconque S une perpendiculaire Sp sur ce plan, et la prolongeant d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité Σ ainsi obtenue soit aussi un sommet du polyèdre. Les sommets S, Σ seront *homologues* par rapport au plan PQ.

Définition V. — Nous pouvons maintenant définir un *polyèdre de forme symétrique,* ou, plus simplement, un *polyèdre symétrique,* celui qui possédera, soit un centre de symétrie, soit un ou plusieurs axes de symétrie, soit un ou plusieurs plans de symétrie. Le polyèdre qui ne possédera ni centre, ni axes, ni plans de symétrie, sera dit *asymétrique.*

Le terme de polyèdre symétrique est pris ici dans un sens plus étendu que celui qu'on a coutume de lui donner dans la Géométrie élementaire, où l'on appelle polyèdres symétriques deux polyèdres distincts disposés symétriquement par rapport à un plan; mais, pour nous, un polyèdre sera dit symétrique lorsqu'il satisfera aux conditions énoncées ci-dessus.

Théorème III. — *S'il existe deux ou plusieurs axes de symétrie, ces axes, et les plans de symétrie que le polyèdre pourrait posséder, doivent tous se couper en un même point.*

Car le centre de gravité des sommets du polyèdre, supposés également pesants, devra évidemment, par la construction connue des centres de gravité, se trouver sur chacun des axes de symétrie, et aussi sur tous les plans de symétrie du polyèdre.

Définition VI. — Le point de mutuelle rencontre des axes et plans de symétrie du polyèdre sera nommé *centre de figure* du polyèdre. Lorsqu'il existe un seul axe de symétrie, lorsque tous les plans de symétrie passent par

cet axe, et qu'il n'y a pas de centre de symétrie, il n'y a pas non plus de centre de figure.

Le centre d'un tétraèdre régulier est un centre de figure, mais non de symétrie, pour ce polyèdre.

Définition VII. — Deux axes de symétrie de même ordre sont dits *axes de même espèce* lorsque la configuration des sommets autour de l'un est la même qu'autour de l'autre. Pour constater cette similitude de configuration, on lie par la pensée les sommets du polyèdre à chacun des deux axes, et l'un de ces deux systèmes est supposé mobile. Alors, si l'on peut faire coïncider en même temps l'axe mobile avec l'axe fixe, les sommets mobiles avec les sommets fixes, les axes sont dits *de même espèce* et *directement semblables*. Si les polyèdres ne peuvent se superposer pendant que les axes coïncident, s'ils sont simplement homologues par rapport à un certain plan de symétrie, c'est-à-dire symétriques l'un de l'autre, dans le sens adopté par Legendre (*Éléments de Géométrie*), les axes seront encore *de même espèce*; mais ils seront dits *inversement semblables*.

Deux plans de symétrie sont *de même espèce* et *directement semblables* lorsqu'en faisant tourner l'un d'eux autour de leur commune intersection, et permettant au polyèdre de participer à ce mouvement, la coïncidence avec l'autre plan de symétrie entraîne la restitution des lieux des sommets. Mais lorsque l'égalité par symétrie des géomètres remplace l'égalité par coïncidence, les plans de symétrie sont dits *de même espèce*, mais *inversement semblables*.

Lorsque ces deux genres de similitude font défaut, les axes ou plans de symétrie sont dits *d'espèces différentes*.

Deux axes de même espèce sont nécessairement de même ordre; mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Définition VIII. — Je nomme *axe principal* un axe de symétrie auquel tous les autres axes, s'il en existe, sont perpendiculaires, et auquel tous les plans de symétrie, s'il en existe, sont parallèles ou normaux, pourvu d'ailleurs que l'ordre de la symétrie de cet axe principal ne soit pas inférieur à celui de la symétrie des autres axes.

Lorsqu'il existe deux ou plusieurs axes satisfaisant à ces conditions, l'un

d'eux peut être choisi arbitrairement, et considéré comme axe principal du polyèdre.

Notations. — Pour représenter symboliquement les diverses sortes de symétrie que les polyèdres peuvent comporter, j'emploierai la lettre C comme désignant un centre de symétrie; oC indiquera que le polyèdre est privé d'un tel centre.

Les lettres A, L, L′ désigneront des axes de symétrie; A^2, L^2, L'^2 des axes binaires; A^3, L^3,... des axes ternaires, et ainsi de suite, l'indice supérieur indiquant le numéro d'ordre de la symétrie.

La lettre A s'appliquera toujours à l'axe principal.

Ces notations suffisent pour les axes, attendu qu'il ne peut jamais en exister plus de trois espèces différentes dans un polyèdre.

Le nombre des axes de même espèce sera indiqué par le coefficient qui précède la lettre symbole de ces axes : ainsi la notation $[A^6, 3L^2, 3L'^2]$ indiquera un axe principal sénaire combiné avec trois axes binaires d'une certaine espèce, et trois autres axes binaires d'une autre espèce.

Les plans de symétrie seront désignés par les lettres Π, P, P′; on affectera la lettre Π au plan de symétrie normal à l'axe principal A, les symboles P et P′ aux plans de symétrie qui ne sont normaux à aucun axe du polyèdre, et les symboles P^q, P'^q, $P^{q'}$ aux plans de symétrie normaux aux axes L^q, L'^q, $L^{q'}$ de ce polyèdre. Le nombre maximum d'espèces de ces plans ne dépasse jamais trois.

Le nombre des plans de symétrie de même espèce sera représenté, comme pour les axes, par le coefficient qui précède le symbole de ces plans : ainsi $[\Pi, 3P^2, 3P'^2]$ signifiera un plan de symétrie normal à l'axe principal, trois plans de symétrie de même espèce normaux aux axes $3L^2$, et trois plans de symétrie d'une autre espèce normaux aux axes $3L'^2$.

Définition IX *et divisions.* — Au point de vue de leur symétrie, les polyèdres peuvent se partager en quatre grandes classes :

1° Polyèdres asymétriques;

2° Polyèdres symétriques dépourvus d'axes;

3° Polyèdres symétriques a axe principal; cette classe se divise en deux, *polyèdres à axe principal d'ordre pair* et *polyèdres à axe principal d'ordre impair;*

4° Polyèdres symétriques sphéroédriques, lesquels possèdent un ou plusieurs axes, dont aucun n'est un axe principal : ils se divisent en deux groupes, les *polyèdres quaterternaires* et les *polyèdres décemternaires*, selon le nombre des axes ternaires qui leur sont propres.

§ I. — Polyèdres asymétriques.

Puisque ces polyèdres n'ont ni axes, ni centre, ni plans de symétrie, ils peuvent, conformément aux conventions précédentes, être représentés par le symbole

$$[oL,\ oC,\ oP].$$

§ II. — Polyèdres symétriques dépourvus d'axes.

Théorème IV. — *Dans tout polyèdre possédant un plan de symétrie et un centre de symétrie, la droite menée par ce centre normalement au plan est un axe de symétrie d'ordre pair.*

Soient PQ, *fig.* 2, le plan de symétrie, C le centre, S un sommet quelconque du polyèdre, CaA la normale au plan. Par cette droite et S menez le plan ACS normal à PQ, et contenant le sommet s homologue de S par rapport au centre C, ainsi que le sommet S′ homologue de s par rapport au plan PQ. Si l'on joint S et S′, il est visible que la droite de jonction sera perpendiculaire sur CA, et que l'on aura aS′ = aS. Donc la condition pour que l'axe AC soit un axe binaire sera satisfaite. L'axe AC pourrait aussi être un axe quaternaire, sénaire, et, en général, un axe d'ordre $2q$. Donc, etc.

Théorème V. — *Lorsqu'il existe deux plans de symétrie dans un polyèdre, leur intersection est un axe de symétrie.*

Soit S, *fig.* 3, un sommet quelconque du polyèdre; prenez pour plan de la figure le plan mené par S normalement aux deux plans de symétrie donnés; soient CP, Cp les traces de ces plans sur le plan de la figure. On obtiendra

l'homologue s de S par rapport au plan CP, en faisant, dans le plan PCp,

$$\text{angle } SCs = 2 \text{ angle } SCP = 2 \text{ angle } sCP, \quad Cs = CS;$$

de même, on aura l'homologue S′ de s par rapport au plan Cp, en faisant

$$\text{angle } S'Cs = 2 \text{ angle } sCp, \quad CS' = Cs;$$

d'où, par soustraction,

$$S'CS = 2\, PCp, \quad CS' = CS.$$

En répétant sur le sommet S′ la construction faite sur S, on arrivera de même à un autre homologue S″, pareillement déterminé par les équations polaires

$$S''CS' = 2\, PCp, \quad CS'' = CS'.$$

Si donc de C, avec un rayon CS, on décrit la circonférence SS′S″, et si l'on porte un certain nombre de fois l'arc SS′ sur cette circonférence, les points S, S′, S″, etc., formant un système nécessairement limité, seront les sommets d'un polygone régulier inscrit à ce cercle. Si q est le nombre de ces sommets, on voit qu'à chaque point S correspondent $q - 1$ autres points homologues de S par rapport à la normale au plan : cette normale sera donc un axe de symétrie dont le numéro d'ordre q dépendra de la valeur de l'angle PCp.

Corollaire. — L'angle SCS′ est nécessairement de la forme

$$\frac{p}{q} 360^\circ,$$

p, q étant des nombres entiers premiers entre eux, et, dans le cas où S, S′ sont deux homologues aussi voisins que possible, on a

$$SCS' = \frac{360^\circ}{q},$$

d'après le corollaire du théorème II.

Théorème VI. — *Les polyèdres symétriques dépourvus d'axes n'ont que deux modes distincts de symétrie, selon qu'ils possèdent un centre ou un plan de symétrie.*

Car ils ne peuvent posséder à la fois un centre et un plan de symétrie, en vertu du théorème IV, ni deux plans de symétrie, en vertu du théorème V. Les symboles de ces deux modes de symétrie seront donc

$$[oL,\ C,\ oP],$$
$$[oL,\ oC,\ P].$$

§ III. — Polyèdres symétriques a axe principal.

Théorème VII. — *Lorsqu'un polyèdre possède deux plans de symétrie* P, *p, non perpendiculaires entre eux, il en possède un troisième* P′ *qui est l'homologue de* P *par rapport au plan p, et de même espèce que* P.

Soient CP, C*p*, *fig.* 3, les traces des deux plans P, *p* sur un plan normal à leur commune intersection, et soit *s*′ un sommet situé sur ce dernier plan. Soit, de plus, CP′ la trace du plan P′ homologue de P par rapport au plan intermédiaire C*p*. Le sommet *s*′ aura un homologue en S par rapport à C*p*, et S un homologue en *s* de l'autre côté de CP : de même, *s* aura un homologue en S′ par rapport au plan C*p* ; il est facile de voir que S′ sera l'homologue de *s*′ par rapport au plan CP′ : ainsi à chaque sommet correspond un autre sommet qui est son homologue par rapport à ce dernier plan ; donc P′ est aussi un plan de symétrie, et l'on voit qu'il est de même espèce que P.

Théorème VIII. — *Lorsqu'un polyèdre possède un plan de symétrie* P, *et un axe de symétrie* L *oblique à ce plan, la droite* L′, *homologue de* L *par rapport au plan, est aussi un axe de symétrie.*

Car soit S, *fig* 4, un sommet quelconque, ayant un homologue en *s* par rapport au plan P, et soient *s*, *s*′, *s*″, etc., le système des homologues de *s* par rapport à l'axe L ; soient S, S′, S″, etc., les homologues de *s*, *s*′, *s*″, etc., par rapport au plan P. La configuration de S, S′, S″, etc., autour de L′ sera la même que celle de *s*, *s*′, *s*″, etc., autour de L ; donc L′ est aussi un axe de symétrie, et de même espèce que L.

Corollaire. — Tout plan de symétrie entraîne la reproduction sur le côté opposé de ce plan, non-seulement de chaque sommet, mais aussi de chaque

plan ou axe de symétrie du polyèdre. Les plans et axes ainsi reproduits sont de même espèce que les primitifs, et inversement semblables à ces derniers.

THÉORÈME IX. — *Dans tout polyèdre possédant un axe* L *d'ordre q, à tout plan de symétrie oblique à l'axe correspondent q — 1 autres plans de symétrie de même espèce.*

Ce théorème se démontrerait comme les théorèmes VII et VIII.

On peut aussi se borner à remarquer que, pendant la rotation du polyèdre autour de l'axe L^q, le plan de symétrie peut être considéré comme participant à cette rotation ; or, pendant qu'elle s'effectue, ce plan ne cesse pas d'être un plan de symétrie par rapport au polyèdre qui participe à son mouvement ; il en sera donc encore de même lorsque la rotation aura atteint une valeur angulaire de $\frac{360^\circ}{q}$.

THÉORÈME X. — *Dans tout polyèdre possédant un axe* L *d'ordre q, à tout axe de symétrie* L' *oblique sur le précédent correspondent q — 1 autres axes de même ordre et de même espèce que l'axe* L'.

Ce théorème se démontre comme le précédent ; lorsque le polyèdre tourne de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de L^q, l'axe L' ne cesse pas d'être un axe de symétrie du polyèdre mobile.

Corollaire. — Tout axe de symétrie d'ordre q nécessite la coexistence de tous les axes ou plans de symétrie qui sont les homologues d'un axe ou d'un plan donné, par rapport à l'axe d'ordre q. Les plans ou axes homologues ainsi obtenus sont de même espèce et directement semblables entre eux.

THÉORÈME XI. — *Lorsqu'il existe un nombre total q de plans de symétrie se coupant suivant une même droite, cette droite est un axe de symétrie dont le numéro d'ordre est q ou un de ses multiples.*

Les angles dièdres de ces plans sont nécessairement égaux entre eux ; sans cela ces plans se reproduiraient symétriquement l'un par rapport à l'autre (théorème VII), et leur nombre total serait supérieur à q.

c.

Soient donc CPA et CpA, *fig.* 5, deux plans de symétrie voisins : on aura évidemment

$$PCp = \frac{180^\circ}{q}.$$

Or, le point σ étant l'homologue de S par rapport au plan PCA, et S' l'homologue de σ par rapport au plan pCA, la rotation qui amènera S en S', en faisant tourner le polyèdre autour de CA, sera, d'après la démonstration du théorème V,

$$PCP' = 2\,PCp = \frac{360^\circ}{q}.$$

Donc l'ordre de symétrie de l'axe CA sera q, ou l'un de ses multiples.

Théorème XII. — *Lorsqu'il existe deux axes de symétrie binaires, la normale à leur plan, menée par leur point d'intersection, est un axe de symétrie du polyèdre.*

Soient CP, Cp, *fig.* 3, les deux axes binaires, et S un sommet du polyèdre; je supposerai que S soit situé à une hauteur Δ au-dessus du plan PCp qui est le plan de la figure, et qu'il se projette orthogonalement en S : l'homologue de S par rapport à l'axe CP sera le point s situé à une distance Δ au-dessous du plan de la figure, et l'on aura, entre les projections S et s, les relations

$$\text{angle } SCs = 2\,\text{angle } SCP, \quad Cs = CS;$$

de même on obtiendra l'homologue S' de s par rapport à l'axe Cp, en posant

$$\text{angle } S'Cs = 2\,\text{angle } sCP, \quad CS' = Cs,$$

et le point S' sera à une hauteur Δ au-dessus du plan de la figure; donc

$$S'CS = 2\,PCp, \quad CS' = CS.$$

En répétant les mêmes opérations sur S', on atteindra de même S'', puis S'''; tous ces points formeront les sommets d'un polygone régulier inscrit au cercle de rayon CS, et seront les homologues de S par rapport à la normale

au plan. Donc cette normale sera un axe de symétrie dont le numéro d'ordre q dépendra de la valeur de l'angle PCp.

Théorème XIII. — *Lorsqu'il existe un nombre total q d'axes binaires répartis sur un plan, la normale au plan est un axe de symétrie dont le numéro d'ordre est q ou un multiple de q.*

Les angles de ces axes sont nécessairement égaux entre eux; sans cela, ces axes se reproduiraient l'un l'autre, dans le même plan (théorème X, *corollaire*), et leur nombre total serait supérieur au nombre q.

Soient donc CP, Cp deux axes binaires voisins, *fig.* 5, et CA la normale à leur plan : on aura évidemment

$$PCp = \frac{180^\circ}{q}.$$

Or, si s est l'homologue de S par rapport à l'axe CP, et S′ l'homologue de s par rapport à l'axe Cp, la rotation qui amènera S en S′, en faisant tourner le polyèdre autour de CA, sera, d'après la démonstration du théorème précédent,

$$\text{angle } PCP' = 2\,PCp = \frac{360^\circ}{q};$$

donc la droite CA sera un axe de symétrie d'ordré égal à q ou à un multiple de q.

Théorème XIV. — *Lorsqu'il existe trois axes quaternaires rectangulaires entre eux, il existe en même temps quatre axes ternaires extérieurs aux plans qui joignent deux à deux les axes quaternaires.*

Soient OA, OB, OC, *fig.* 6, les trois axes quaternaires se coupant au centre de figure O du polyèdre. Faisons faire au polyèdre un quart de tour autour de OA et de B vers C; le lieu apparent des sommets restera le même, et l'axe OB viendra en OC. Faisons faire au polyèdre un second quart de tour, autour de la verticale OC, de A vers B; le lieu apparent des sommets restera encore le même; l'axe OB restera en OC, et l'axe OA viendra en OB. Le résultat de cette double rotation sera donc de transporter le système des

axes OA, OB, fixes avec le polyèdre et mobiles avec lui, sur le système des droites fixes OB, OC. Or il est visible que ce transport équivaut à une rotation unique de 120 degrés autour de la droite OD qui joint le centre de figure O au centre D du triangle sphérique trirectangle ABC. D'où l'on voit que la ligne OD est un axe ternaire du polyèdre, et comme il existe huit triangles trirectangles à centres opposés deux à deux, ces axes ternaires seront au nombre de quatre, tous extérieurs aux plans AOB, AOC, BOC.

Corollaire. — Un polyèdre à trois axes quaternaires rectangulaires ne possède pas d'axe principal; car, dans tout polyèdre pourvu d'un axe principal, si l'on prend trois axes quelconques L, L′, L″ non situés dans le même plan, deux au moins des trois angles qu'ils comprennent doivent, d'après la définition de l'axe principal, être égaux à 90 degrés. Or, cette condition n'est pas satisfaite par le système des trois axes OA, OB, OD.

Théorème XV. — *Dans tout polyèdre possédant un axe principal* A^q, *s'il existe un second axe de symétrie, cet axe, nécessairement situé dans un plan normal à* A^q, *aura une symétrie simplement binaire.*

Soient CA, *fig.* 7, l'axe A^q, et CL le second axe, x étant le numéro d'ordre inconnu de sa symétrie; il est clair que cet axe sera situé dans un plan normal à A^q, et je dis, de plus, que l'on aura $x = 2$.

En effet, d'après la définition de l'axe principal, les axes homologues de A^q par rapport à L^x (théorème X, *corollaire*) doivent être normaux à A^q, ou coïncider avec lui. Ainsi, on ne peut faire que les suppositions $x = 2$, $x = 4$, correspondant, la première au cas d'un demi-tour autour de L^x, la deuxième au cas d'un quart de tour.

Si $x = 4$, l'axe CL sera quaternaire, et l'axe CA se reproduira en CL′, qui sera un axe de même espèce que lui (théorème X), et situé dans le plan normal à CA, passant par C; CL′ sera donc aussi un axe d'ordre q, et pour que les axes homologues de l'axe CL par rapport à CL′ ne sortent pas du plan LCL′, comme l'exige la définition de l'axe principal, il faudra que l'on ait $q = 4$ ou $q = 2$.

Le cas $q = 4$ correspond au cas de trois axes quaternaires rectangulaires,

et doit être rejeté; car il n'y a pas alors d'axe principal (théorème XIV, *corollaire*).

Dans le cas $q=2$, l'axe CL sera le véritable axe principal. En effet, il est facile de voir qu'il ne peut y avoir de plan de symétrie passant par CA et oblique à CL; car son premier homologue par rapport à l'axe quaternaire CL ne serait ni normal ni parallèle à CA, et cela serait contraire à la supposition que CA est un axe principal : donc rien ne s'oppose à ce que l'on considère CL comme axe principal, et l'on doit le faire, puisque l'ordre de sa symétrie est plus élevé que l'ordre de la symétrie de CA. Donc, si CA est réellement un axe principal, on ne peut jamais avoir $x=4$.

Il ne reste que la supposition $x=2$; donc le deuxième axe de symétrie sera un axe simplement binaire.

Théorème XVI. — *Dans tout polyèdre à axe principal, les q axes binaires situés dans le plan normal à cet axe sont également inclinés, chacun sur son voisin, et sont de même espèce de deux en deux.*

Car soient CP, Cp, *fig.* 3, deux axes binaires voisins; l'axe binaire Cp forcera l'axe CP à se reproduire du côté opposé en CP′ (théorème X, *corollaire*); CP′ entraîne à son tour l'existence de l'axe Cp', et ainsi de suite : d'où l'on voit que les q angles PCp, pCP′, P′Cp', etc., doivent être égaux entre eux et à $\frac{180^\circ}{q}$.

Les axes CP et CP′ sont de même espèce et directement semblables par rapport à l'axe intermédiaire Cp; de même Cp et Cp' sont de même espèce entre eux et directement semblables par rapport à l'axe CP′; donc, etc.

Théorème XVII. — *Les polyèdres qui possèdent un axe* Λ^q, *q plans de symétrie passant par cet axe, et le plan de symétrie* Π *normal à l'axe principal, possèdent aussi q axes binaires, aux intersections de ces q plans avec le plan* Π.

La rencontre de deux plans de symétrie est toujours un axe de symétrie (théorème V); or, cet axe ne peut être que binaire (théorème XV); donc, etc.

On peut aussi, pour démontrer ce théorème, recourir à la *fig.* 5, où CPQ est l'un des q plans passant par l'axe Λ^q, et CPP′ le plan Π.

Soit Σ l'homologue du sommet S par rapport au plan Π ; soit s l'homologue de Σ par rapport au plan CPQ : il est visible que S et s sont homologues l'un de l'autre par rapport à CP, qui est ainsi un axe binaire du polyèdre.

Théorème XVIII. — *Les polyèdres qui ont un axe Λ^q, q axes binaires normaux à Λ^q, et le plan de symétrie* Π *normal à Λ^q, ont aussi q plans de symétrie passant par l'axe Λ^q et par chacun des axes binaires.*

Soit CP, *fig.* 5, l'un des axes binaires ; soit CPP' le plan Π normal à l'axe principal CA. Le sommet S aura un homologue en s, de l'autre côté de l'axe binaire CP ; le sommet s aura un homologue en σ, de l'autre côté du plan Π : les points S et σ seront homologues l'un de l'autre par rapport au plan CPQ ; donc ce dernier plan sera l'un des plans de symétrie du polyèdre.

Théorème XIX. — *Les polyèdres qui possèdent un axe principal Λ^q, q plans de symétrie passant par cet axe, et un centre de symétrie, possèdent aussi q axes binaires menés par le centre normalement à chacun de ces plans.*

C'est une conséquence des théorèmes IV et XV.

Théorème XX. — *Les polyèdres qui possèdent un axe Λ^q, q axes binaires normaux à Λ^q, et un centre de symétrie, possèdent aussi q plans de symétrie normaux à ces axes binaires.*

Cela résulte du théorème XXI que nous allons démontrer.

Cas des polyèdres à axe principal d'ordre pair.

Théorème XXI. — *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair et un centre de symétrie possède un plan de symétrie passant par le centre et normal à cet axe.*

Soit CA, *fig.* 2, l'axe de symétrie d'ordre $2q$; soient C le centre de symétrie, et PQ le plan normal à CA. Le sommet S a $2q-1$ homologues par rapport à l'axe CA ; si donc on abaisse la normale Sa sur CA, et si on la

prolonge de $aS'=aS$, S' sera l'un de ces homologues. Joignant S' au centre C, prolongeant et faisant $c\Sigma=cS'$, on obtient le sommet Σ homologue de S' par rapport au centre C : évidemment S et Σ sont homologues par rapport au plan PQ; donc ce plan est un plan de symétrie du polyèdre.

Théorème XXII. — *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair et un plan de symétrie normal à cet axe possède un centre de symétrie situé à la rencontre de l'axe et du plan.*

Soit S', *fig.* 2, l'homologue opposé au sommet S par rapport à l'axe CA; soit s l'homologue de S' par rapport au plan PQ normal à l'axe CA : les deux sommets S et s seront homologues relativement au point C où l'axe coupe le plan; ce point sera donc un centre de symétrie du polyèdre.

Théorème XXIII. — *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair, et un plan de symétrie passant par cet axe, possède un second plan de symétrie passant par l'axe et normal au plan précédent.*

Soient CA, *fig.* 7, l'axe d'ordre pair, LCA le plan de symétrie donné, S un sommet du polyèdre, S' son homologue de l'autre côté de CA, s' l'homologue de S' par rapport au plan LCA : S et s' seront homologues par rapport au plan ACL' passant par CA et normal au précédent; donc, etc.

Théorème XXIV. — *Dans tout polyèdre possédant un axe* L^{2q}, *s'il existe des axes binaires normaux à* L^{2q}, *leur nombre total est égal à* $2q$, *savoir :* q *axes d'une première espèce, et* q *axes d'une seconde espèce, alternant avec les précédents.*

Soit CP, *fig.* 5, un axe binaire normal à l'axe CA d'ordre $2q$; soit menée, dans le plan PCP' normal à CA, la droite CP' faisant avec CP l'angle

$$PCP'=\frac{360^\circ}{2q}=\frac{180^\circ}{q};$$

la droite CP' sera un axe binaire de même espèce que CP, à cause de la symétrie propre à l'axe CA (théorème X, *corollaire*). Le nombre des axes

f

ainsi obtenus sera égal à q; chacun d'eux peut être considéré comme dérivant de CP par des rotations égales à

$$0^\circ,\quad \frac{180^\circ}{q},\quad 2\frac{180^\circ}{q},\ldots,\quad (q-1)\frac{180^\circ}{q}:$$

les axes correspondants aux rotations

$$q\frac{180^\circ}{q},\quad (q+1)\frac{180^\circ}{q},\ldots,\quad (2q-1)\frac{180^\circ}{q},$$

coïncident avec les précédents.

Si maintenant on partage PCP′ en deux parties égales par la bissectrice Cp, Cp sera aussi un axe binaire. Car soit s l'homologue de S par rapport à CP; soit s' l'homologue de s par rapport à l'axe CA, l'angle de rotation qui amène s en s' étant

$$\frac{360^\circ}{2q} = \text{PCP}';$$

les sommets S, s' seront homologues par rapport à Cp considéré comme étant un axe binaire : ces q droites bissectrices seront ainsi des axes binaires, mais d'une autre espèce.

Il y aura donc $2q$ axes binaires, et leur nombre ne peut être plus considérable; car, s'il existait Q axes binaires, Q étant supérieur à $2q$, l'ordre de la symétrie de l'axe normal à leur plan serait Q ou mQ (théorème XIII), ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé.

Corollaire I. — Le nombre des axes binaires normaux à un axe principal A^{2q} sera toujours égal à 0 ou à $2q$.

Corollaire II. — Les axes binaires normaux à A^{2q} sont perpendiculaires entre eux, deux à deux.

Théorème XXV. — *Dans tout polyèdre possédant un axe L^{2q}, s'il existe des plans de symétrie passant par cet axe, leur nombre total sera $2q$, dont q d'une espèce, et q d'une autre espèce, alternant avec les précédents.*

Soient ACP, ACP′, *fig.* 5, deux plans de symétrie faisant entre eux l'angle

$$PCP' = \frac{360°}{2q} = \frac{180°}{q}.$$

Le système de ces plans se composera de q plans de symétrie, de même espèce et directement semblables entre eux. De plus, les plans intermédiaires qui partagent en deux parties égales les angles dièdres (ACP, ACP′) sont aussi des plans de symétrie. Car soit ACp un de ces plans intermédiaires; prenez σ homologue d'un sommet donné S par rapport au plan ACP, et soit σ' l'homologue de σ par rapport à CA, l'angle de rotation qui amène σ en σ' étant

$$\frac{360°}{2q} = PCP':$$

il est clair que S et σ' seront symétriquement placés par rapport au plan ACp; donc ce plan est un plan de symétrie, et il en existe en tout q d'une autre espèce que ACP, et tous directement semblables à ACp.

Il existe donc $2q$ plans de symétrie passant par L^{2q}, et leur nombre ne peut être plus considérable; car s'il était égal à $Q > 2q$, l'ordre de la symétrie de l'axe placé à leur commune rencontre serait Q ou mQ (théorème XI), ce qui ne peut être.

Corollaire I. — Le nombre des plans de symétrie passant par un axe principal A^{2q} est toujours o ou $2q$, et ne peut être supérieur à ce dernier nombre.

Corollaire II. — Ces plans de symétrie sont perpendiculaires deux à deux.

Théorème XXVI. — *Les polyèdres à axe principal A^{2q}, qui ne possèdent ni plans de symétrie passant par cet axe, ni axes binaires, ont deux modes distincts de symétrie, selon que le plan normal à l'axe principal est ou n'est pas un plan de symétrie.*

Le nombre des axes de symétrie est fixé par l'énoncé du théorème; il en est de même de celui des plans de symétrie, du moment que l'on sait si le

f.

plan normal à l'axe principal est ou n'est pas un plan de symétrie. Quant à la présence du centre de symétrie, elle est subordonnée à celle du plan de symétrie normal à l'axe principal (théorèmes XXI et XXII).

Les symboles de ces deux modes de symétrie seront donc

$$[A^{2q},\ oL^2,\ oC,\ oP],$$
$$[A^{2q},\ oL^2,\ C,\ \Pi].$$

THÉORÈME XXVII. — *Les polyèdres à axe principal* A^{2q}, *qui possèdent isolément, soit les* $2q$ *plans de symétrie, soit les* $2q$ *axes binaires, compatibles avec cet axe principal, ne peuvent avoir ni plan de symétrie normal à l'axe principal, ni centre de symétrie.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes XVII, XVIII, XIX et XX.

Le groupe de polyèdres auquel se rapporte l'énoncé du théorème actuel se décompose en deux classes à symétrie distincte, selon que les plans de symétrie ou les axes binaires font défaut; les axes binaires étant de deux espèces différentes (théorème XXII), nous représenterons ceux d'une première espèce par L^2, ceux d'une deuxième espèce par L'^2. De même pour les plans de symétrie; ceux d'une espèce seront désignés par P, ceux de l'autre espèce par P'. On aura ainsi, pour représenter les deux classes de polyèdres, les symboles

$$[A^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ oC,\ oP],$$
$$[A^{2q},\ oL^2,\ oC,\ qP,\ qP'].$$

THÉORÈME XXVIII. — *Dans les polyèdres possédant l'axe principal* A^{2q}, $2q$ *axes binaires et* $2q$ *plans de symétrie passant par l'axe principal, les axes binaires peuvent être situés sur les plans de symétrie, ou bien alterner avec eux, c'est-à-dire coïncider avec les bissectrices de leurs angles dièdres; ce qui donne, pour ce cas particulier, deux modes distincts de symétrie.*

Pour toute autre position relative, les axes binaires, en reproduisant par des rotations de 180 degrés les $2q$ plans de symétrie (théorème X, *corol-*

laire), feraient doubler le nombre de ces derniers; et, de même, les axes binaires se répétant dans des positions homologues de l'autre côté des plans (théorème VIII, *corollaire*), doubleraient aussi en nombre; ce qui est contraire aux corollaires des théorèmes XXIV et XXV : donc, etc.

THÉORÈME XXIX. — *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q}, *lorsque les plans de symétrie contiennent les axes binaires, il existe un plan de symétrie normal à l'axe principal, et un centre de symétrie.*

Soit CA, *fig.* 5, l'axe principal; soient CP l'un des axes binaires, et ACPQ le plan de symétrie qui contient cet axe. Le sommet S aura son homologue en s par rapport à l'axe binaire CP; s aura son homologue en Σ par rapport au plan ACPQ. La disposition relative de S et Σ indique que le plan PCP′, normal à CA et au plan CAP, est un plan de symétrie du polyèdre, par rapport auquel S et Σ sont deux sommets homologues : donc il existera un plan de symétrie normal à A^{2q}, lequel entraîne à son tour l'existence d'un centre de symétrie (théorème XXII).

THÉORÈME XXX. — *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q}, *lorsque les plans de symétrie alternent avec les axes binaires, ceux-ci sont tous de même espèce, mais inversement semblables chacun avec son voisin; il n'existe alors ni plan de symétrie normal à l'axe, ni centre de symétrie.*

S'il existait un plan de symétrie normal à l'axe, ses intersections avec les plans de symétrie seraient des axes binaires (théorème XVII), ce qui est contraire à l'énoncé de notre théorème; donc il n'existe ni plan de symétrie normal à l'axe principal, ni centre de symétrie (théorème XXI).

Les axes binaires voisins $L_0 l_0$, $L_1 l_1$, *fig.* 8, sont inversement semblables, comme homologues par rapport au plan de symétrie intermédiaire qui passe par l'axe principal et par $P_0 C p_0$.

La similitude inverse n'exclut pas nécessairement, dans le cas général, la similitude directe; mais, dans le cas présent, il est facile de s'assurer que $L_0 l_0$, $L_1 l_1$ ne peuvent jamais être directement semblables; car la rotation qui amènerait la coïncidence caractéristique de la similitude directe ne peut évidemment s'effectuer qu'autour de l'axe principal, autour de la bissectrice $p_0 CP_0$,

ou enfin autour de la deuxième bissectrice p_2CP_2, normale à la précédente. Comme il existe $2q$ axes binaires, on a

$$L_0CL_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{360^\circ}{4q}, \quad P_0CP_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{90^\circ}{q}.$$

Si CL_2, CL_1 étaient directement semblables par rapport à l'axe principal, la rotation qui restitue les lieux des sommets étant $\frac{360^\circ}{4q}$, l'ordre de la symétrie de l'axe principal serait $4q$, ce qui ne peut être. De même CL_0, CL_1 ne peuvent être directement semblables par rapport à CP_0, puisque CP_0 n'est point un axe binaire. La normale à CP_0, ou CP_2, n'est pas non plus un axe binaire, puisque l'on a

$$90^\circ = q \times P_0CP_1,$$

et qu'ainsi cette normale est une droite du groupe CP_0, CP_1, CP_2. Donc les axes binaires voisins sont inversement semblables, sans aucune possibilité de superposition.

La *fig.* 8 offre la disposition des sommets homologues pour le cas $2q = 6$. Le plan de symétrie normal à l'axe principal est pris pour plan de la figure. Les ronds noirs indiquent les sommets situés au-dessous de ce plan; les ronds à centre blanc, les sommets situés au-dessus du même plan.

En exprimant les symboles des deux modes de symétrie que nous examinons, il convient de remarquer que, dans le cas du théorème XXIX, les plans de symétrie sont normaux aux axes binaires, et que, dans le cas où les plans alternent avec les axes, ils ne peuvent leur être perpendiculaires. Nous aurons ainsi pour les formules relatives, 1° au cas de la coïncidence, 2° au cas de l'alternance:

$$[A^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ C,\ \Pi,\ qP^2,\ qP'^2],$$
$$[A^{2q},\ 2qL^2,\ 0C,\ 2qP].$$

On voit, par les théorèmes XXVI, XXVII et XXVIII, que les polyèdres à axe principal d'ordre pair ne peuvent avoir que six modes de symétrie; on les trouvera indiqués dans le tableau synoptique qui termine ce Mémoire.

Dans ce tableau, on peut donner à q toutes les valeurs possibles, depuis $q = 1$ inclusivement, jusqu'à $q = \infty$.

Cas des polyèdres à axe principal d'ordre impair.

Théorème XXXI. — *Un polyèdre possédant un axe principal d'ordre impair ne peut posséder en même temps un plan de symétrie normal à cet axe et un centre de symétrie*

C'est une conséquence du théorème IV.

Théorème XXXII. — *Dans tout polyèdre possédant un axe principal A^{2q+1}, s'il existe d'autres axes, ces axes sont binaires, leur nombre total est égal à $2q + 1$, et ils sont tous de même espèce.*

Un quelconque des nouveaux axes, nécessairement binaire et situé dans le plan normal à A^{2q+1} (théorème XV), sera répété $2q$ fois, en vertu du corollaire du théorème X; d'ailleurs ces $2q + 1$ axes seront distincts entre eux, et ne se superposeront pas (comme cela arrive pour le cas des axes principaux d'ordre pair). En effet, si on les numérote 0, 1, 2, etc., dans l'ordre où des rotations successives, égales chacune à $\frac{360°}{2q+1}$, les font naître, on trouve que les inclinaisons de 0, 1, 2, 3, etc., sur l'axe 0 sont

$$0°,\quad \frac{360°}{2q+1},\quad \frac{2.360°}{2q+1},\ldots\quad \frac{q.360°}{2q+1},\quad \frac{(q+1)\,360°}{2q+1},\ldots\quad \frac{2q.360°}{2q+1},$$

et correspondent à des droites distinctes, puisque deux de ces angles ne peuvent jamais différer de 180 degrés.

Il ne peut exister, dans le plan normal à l'axe principal, d'autres axes binaires que ceux dont nous venons de constater la présence. Car, soit Q leur nombre total : si l'on avait $Q > 2q + 1$, le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe principal serait Q ou mQ (théorème XIII), ce qui est contraire à la supposition d'un axe principal d'ordre $2q + 1$.

Corollaire. — Le nombre des axes binaires normaux à A^{2q+1} sera toujours 0 ou $2q + 1$.

Théorème XXXIII. — *Dans tout polyèdre possédant l'axe principal* Λ^{2q+1}, *s'il existe des plans de symétrie passant par l'axe principal, leur nombre total est* $2q+1$, *et ils sont tous de même espèce.*

On démontrera, comme dans le théorème précédent : 1° que les $2q+1$ plans provenant de rotations successives, toutes égales à $\frac{360°}{2q+1}$, autour de l'axe principal, sont distincts, de même espèce, et directement semblables entre eux ; 2° que leur nombre ne peut surpasser $2q+1$, à cause du théorème XI.

Corollaire. — Le nombre des plans de symétrie passant par l'axe principal Λ^{2q+1} sera toujours égal à 0 ou à $2q+1$.

Théorème XXXIV. — *Les polyèdres à axe principal* Λ^{2q+1}, *qui ne possèdent ni plans de symétrie passant par cet axe, ni axes binaires, offrent trois modes distincts de symétrie, selon qu'ils ont ou n'ont pas un plan de symétrie normal à l'axe, et, dans ce dernier cas, selon qu'ils ont ou n'ont pas un centre de symétrie.*

Si le polyèdre possède un plan de symétrie normal à l'axe principal, il ne peut avoir de centre de symétrie (théorème XXXI) ; dès lors, l'axe étant un axe principal, la symétrie du polyèdre est complétement fixée.

Si le plan normal à l'axe principal n'est point un plan de symétrie, la même impossibilité n'existe plus. Ainsi, avec nos précédentes notations, nous aurons les trois symboles distincts

$$[\Lambda^{2q+1},\ 0L^2,\ 0C,\ 0P],$$
$$[\Lambda^{2q+1},\ 0L^2,\ C,\ 0P],$$
$$[\Lambda^{2q+1},\ 0L^2,\ 0C,\ \Pi].$$

Théorème XXXV. — *Les polyèdres à axe principal* Λ^{2q+1}, *qui possèdent isolément, soit les* $2q+1$ *plans de symétrie, soit les* $2q+1$ *axes binaires, compatibles avec cet axe principal, ne peuvent avoir ni plan de symétrie normal à* Λ^{2q+1}, *ni centre de symétrie.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes XVII, XVIII, XIX et XX.

En conservant les notations déjà adoptées, on trouve que les deux classes de polyèdres auxquels se rapporte le théorème actuel sont représentées par les symboles

$$[\mathrm{A}^{2q+1},\ (2q+1)\mathrm{L}^2,\ o\mathrm{C},\ o\mathrm{P}],$$
$$[\mathrm{A}^{2q+1},\ o\mathrm{L}^2,\ o\mathrm{C},\ (2q+1)\mathrm{P}].$$

Théorème XXXVI. — *Dans les polyèdres possédant l'axe principal* A^{2q+1}, $2q+1$ *axes binaires et* $2q+1$ *plans de symétrie passant par l'axe principal, les axes binaires sont situés sur les plans de symétrie, ou bissèquent leurs angles dièdres.*

Ce théorème se démontre exactement comme le théorème XXVIII.

Théorème XXXVII. — *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q+1}, *lorsque les plans de symétrie contiennent les axes binaires, il existe un plan de symétrie normal à l'axe principal, mais pas de centre de symétrie.*

La démonstration est celle du théorème XXIX. Mais la conséquence relative à l'existence du centre de symétrie n'a plus lieu, à cause du théorème XXXI.

Théorème XXXVIII. — *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q+1}, *lorsque les plans de symétrie alternent avec les axes binaires, ceux-ci sont tous de même espèce, et coïncident avec les normales aux plans de symétrie; il existe alors un centre de symétrie, mais pas de plan de symétrie normal à l'axe principal.*

Les axes binaires CL_0, CL_1, CL_2, *fig.* 9, partagent alors en $2q+1$ parties égales la demi-circonférence d'un cercle décrit de C comme centre; ce nombre étant impair, l'une des bissectrices des angles $\mathrm{L}_0\mathrm{CL}_1$, $\mathrm{L}_1\mathrm{CL}_2$, etc., sera normale à CL_0; donc il existera toujours un plan de symétrie normal à l'axe CL_0 : c'est le plan dont la trace est $\mathrm{P}_1\mathrm{C}p_1$ sur le plan de la *fig.* 9, supposé normal à l'axe principal. La coexistence d'un plan de symétrie et d'un axe binaire qui lui est normal entraîne celle du centre de symétrie (théorème XXII).

D'ailleurs, les axes binaires sont tous directement semblables par rapport à l'axe principal, et, par conséquent, de même espèce. Les ronds à centre blanc et à centre noir de la *fig.* 9 indiquent la disposition des sommets homologues; les ronds noirs indiquent les sommets situés au-dessous du plan de la figure; ceux à centre blanc, les sommets situés au-dessus de ce plan.

Les symboles des polyèdres auxquels se rapportent les théorèmes XXXVII et XXXVIII seront donc, d'après les conventions de la page xxv,

$$[\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)L^2,\ C,\ (2q+1)P^2],$$
$$[\Lambda^{2q+1},\ (q+1)L^2,\ 0C,\ \Pi,\ (2q+1)P].$$

On voit, par les théorèmes XXXIV, XXXV et XXXVIII, que les polyèdres à axe principal d'ordre impair ne peuvent avoir que les sept modes de symétrie indiqués dans le tableau qui termine ce Mémoire.

On peut, dans ce tableau, donner à q toutes les valeurs imaginables, depuis $q=1$ inclusivement jusqu'à $q=\infty$.

§ IV. — Polyèdres symétriques sphéroédriques.

Théorème XXXIX. — *Tout polyèdre sphéroédrique possède au moins deux axes L^q, $L^{q'}$, dont les numéros d'ordre sont supérieurs à 2.*

Un polyèdre sphéroédrique (*définition* IX) ne peut posséder un seul axe de symétrie; car alors, afin d'éviter la reproduction de cet axe par les plans de symétrie du polyèdre (théorème VIII, *corollaire*), il faudrait que ces plans continssent l'axe unique de symétrie ou coïncidassent avec son plan normal : cet axe unique pourrait donc toujours être considéré comme étant un axe principal, et le polyèdre ne serait pas sphéroédrique.

Il existe donc deux ou plusieurs axes de symétrie dans les polyèdres sphéroédriques. Soient alors L^q, $L^{q'}$ deux axes dont les numéros d'ordre q, q' ne soient pas inférieurs à ceux des autres axes : je dis que l'on aura $q>2$, $q'>2$.

Supposons d'abord que l'on ait $q=2$, $q'=2$. La normale au plan des

axes L^2, L'^2 sera aussi un axe de symétrie $L^{q''}$ (théorème XI), et puisqu'on ne peut avoir $q'' > q$, $q'' > q'$, on aura $q'' = 2$. D'ailleurs L^2 et L'^2 sont rectangulaires; sans cela il y aurait un troisième axe binaire sur le plan des axes L^2, L'^2, et q'' serait plus grand que 2 (théorème XIII), ce qui ne peut être. On a donc alors trois axes binaires rectangulaires L^2, L'^2, L''^2, et je dis que l'un au moins de ces axes peut être considéré comme étant un axe principal.

En effet, il ne peut alors y avoir dans le polyèdre aucun autre axe binaire que les trois axes L^2, L'^2, L''^2; car tout axe oblique à L^2, étant combiné avec L^2, ferait naître d'autres axes binaires dans leur plan commun (théorème X, *corollaire*), et un axe de symétrie d'ordre supérieur à 2 (théorème XIII).

De même, tout plan de symétrie doit passer par l'un des trois axes, tel que L^2; sans cela, il se produirait trois autres axes binaires homologues par rapport à ce plan, et le nombre total des axes binaires serait six, ce que nous venons de prouver ne pas être possible. Soit donc P un plan de symétrie passant par L^2. S'il existe un second plan de symétrie P', il doit être perpendiculaire à P; sans cela, leur intersection serait un axe d'ordre supérieur à 2 (théorème XI). Voyons donc si la disposition de ces plans peut être telle, que le polyèdre n'ait pas d'axe principal.

Si le plan P ne passe ni par L'^2, ni par L''^2, P' devra passer par L^2; sans cela son intersection avec P formerait un quatrième axe binaire, ce qui est impossible; et il en serait de même de tous les autres plans P'', P''' qui tous passeraient nécessairement par L^2. Ainsi, dans ce cas, l'axe L^2 satisferait aux conditions exigées pour les axes principaux, et le polyèdre ne serait pas sphéroédrique.

Si, au contraire, le plan P contient non-seulement L^2, mais encore l'un des deux axes binaires L'^2, L''^2; si, par exemple, il contient l'axe L'^2, le plan P', qui doit toujours passer par la normale au plan P, c'est-à-dire par L''^2, devra, pour que son intersection avec P ne forme pas un quatrième axe binaire, contenir l'axe L^2 ou l'axe L'^2, par exemple l'axe L^2. S'il existe alors un troisième plan P'', il devra être perpendiculaire à la fois à P et à P' (*voyez* ci-dessus); il passera donc par L'^2 et L''^2, et il ne pourra exister d'autre plan de symétrie. Dans ce cas, l'un quelconque des axes L^2, L'^2, L''^2

peut être considéré comme étant un axe principal, et le polyèdre n'est pas sphéroédrique.

Donc on ne peut avoir $q = 2$, $q' = 2$.

Supposons maintenant que l'on ait $q > 2$, $q' = 2$. Les deux axes L^q, L'^2 seront rectangulaires entre eux; sans cela, l'axe L'^2 forcerait l'axe L^q à se reproduire, au moins une fois, et le nombre q' serait inférieur au numéro d'ordre de deux des axes du polyèdre, ce qui n'est pas possible, d'après les hypothèses précédemment faites. Par la même raison, il ne pourra exister aucun axe en dehors du plan normal à L^q. Ainsi, la première condition pour que L^q soit un axe principal est satisfaite.

De même, les plans de symétrie du polyèdre, étant assujettis à ne pouvoir reproduire l'axe L^q, devront nécessairement contenir L^q ou lui être perpendiculaires; donc L^q sera un axe principal, et le polyèdre ne sera point sphéroédrique.

Donc on ne peut avoir

$$q > 2, \quad q' = 2.$$

Donc enfin on aura

$$q > 2, \quad q' > 2.$$

Théorème XL. — *Lorsqu'il existe dans un polyèdre deux axes d'ordre supérieur au deuxième, le polyèdre est nécessairement sphéroédrique.*

Car si le polyèdre possédait un axe principal, les autres axes seraient nécessairement binaires (théorème XV), ce qui est contraire à l'énoncé. Donc le polyèdre sera sphéroédrique.

Définition X. — Les théorèmes XXXIX et XL nous indiquent que l'on peut donner une définition des polyèdres sphéroédriques différente de celle de la page xxvi, et dire que ces polyèdres sont des « polyèdres symétriques » à plusieurs axes, dont deux au moins ont une symétrie d'un ordre supé- » rieur au deuxième. » Les polyèdres à axe principal peuvent alors se définir comme étant « des polyèdres pourvus d'un ou plusieurs axes de » symétrie, dont un au plus est d'un ordre supérieur au deuxième. »

Théorème XLI. — *Dans tout polyèdre sphéroédrique, possédant un*

axe de symétrie L^q d'ordre supérieur au deuxième, le nombre total Q des axes d'ordre q appartenant à ce polyèdre est nécessairement égal à la moitié de l'une des valeurs que peut avoir le nombre des sommets d'un polyèdre régulier auxiliaire satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° que son centre de figure soit aussi un centre de sa symétrie; 2° que chacun de ses angles solides soit formé de q angles plans.

L'axe L^q est nécessairement associé à un axe $L^{q'}$, q' étant plus grand que 2 (théorème XXXIX); or, en faisant tourner L^q autour de $L^{q'}$ d'un angle égal à $\frac{360^\circ}{q'}$, on obtiendra le lieu d'un deuxième axe d'ordre q, distinct de l'axe primitif L^q (théorème X, *corollaire*).

Soient donc OA, OB, *fig.* 10, ces deux axes d'ordre q se coupant en O, qui est le centre de figure du polyèdre. De O comme centre, décrivons la sphère de rayon 1, coupant les deux axes OA, OB en A et B, et menons l'arc de grand cercle AB. On pourra toujours supposer

$$\text{arc}\,AB < 90^\circ \quad \text{ou} \quad = 90^\circ :$$

dans le cas contraire, on considérerait le supplément de l'angle AOB. De même, on peut toujours supposer que OA et OB sont choisis de manière que leur inclinaison soit la plus petite parmi toutes celles que les axes d'ordre q ont entre eux. Ceci posé, faisons tourner le polyèdre de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de l'axe OB d'ordre q. Le point A viendra en C : joignons BC par un arc de grand cercle; on aura

$$ABC = \frac{360^\circ}{q},$$

et la droite OC sera aussi un axe d'ordre q (théorème X, *corollaire*). Traçons de même l'arc de grand cercle CD, tel que l'on ait

$$CD = CB = AB, \quad BCD = \frac{360^\circ}{q};$$

la droite OD sera encore un axe d'ordre q.

Si l'on fait tourner le polyèdre une deuxième fois de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de l'axe

OC et de B vers D, l'effet de cette seconde rotation sera d'amener le point B en D, le point A restant en C. Les deux rotations équivalent à une rotation unique autour du point M, pôle du petit cercle circonscrit aux points A, B, C, D [*]. La double rotation autour de OB et de OC ne troublant pas les lieux apparents des sommets du polyèdre, la rotation unique autour de M, qui la remplace, ne troublera pas non plus ces lieux apparents; donc la droite OM sera un axe de symétrie du polyèdre, et l'on voit que si l'on fait tourner le polyèdre autour de OM d'un angle égal à l'angle dièdre AMC, le lieu des sommets n'en sera pas troublé. Donc cet angle est commensurable avec la circonférence (théorème II). Donc le nombre des sommets A, B, C, D, etc., situés sur la circonférence du petit cercle ABCD, est limité : donc ces sommets forment un polygone régulier inscrit dont le nombre de côtés pourra être désigné par r. Il sera toujours permis de supposer que A et B sont deux sommets voisins; on pourra donc écrire

$$\text{AMB} = \frac{360^\circ}{r},$$

formule dans laquelle le nombre r sera nécessairement plus grand que 2.

Puisque AMB et ABC sont des sous-multiples de 360 degrés, le polygone régulier sphérique ABCDE..., se répétant en CBC'D''..., en A'ABC'D'..., etc., finira par recouvrir la totalité de la surface de la sphère. L'ensemble des points ainsi obtenus y figurera les sommets d'un polyèdre régulier inscrit, et ce polyèdre régulier sera nécessairement l'un de ceux dans lesquels les angles plans s'assemblent en un nombre égal à q, pour former chacun de ses angles solides.

Les cinq polyèdres réguliers de la Géométrie ont tous, excepté le tétraèdre régulier, un centre de symétrie en leur centre de figure; mais, dans le tétraèdre inscrit à la sphère, la distance angulaire AB de deux sommets surpasse 90 degrés. Ce cas ne pourra donc pas se présenter, puisqu'il est contraire à notre mode de construction.

---

[*] Ce pôle M est à la rencontre des arcs de grand cercle BM, CM qui divisent en deux parties égales les angles sphériques ABC, BCD.

Le polyèdre inscrit résultant de la construction précédente sera donc : ou le cube correspondant au cas $q = 3$, $r = 4$; on a alors [*]

$$AB = 70° 32', \quad AM = 54° 44';$$

ou l'octaèdre régulier correspondant au cas $q = 4$, $r = 3$; on a alors

$$AB = 90°, \quad AM = 54° 44';$$

ou le dodécaèdre régulier correspondant au cas $q = 3$, $r = 5$; alors

$$AB = 41° 49', \quad AM = 37° 23';$$

ou l'icosaèdre régulier correspondant au cas $q = 5$, $r = 3$; alors

$$AB = 63° 26', \quad AM = 37° 23'.$$

Soit maintenant M le nombre des sommets du polyèdre régulier ainsi obtenu ; chaque sommet ayant son homologue, qui lui est diamétralement opposé, on voit que le nombre total Q des axes d'ordre q sera au moins égal à $\frac{1}{2}$M. Je dis, de plus, qu'on ne peut avoir $Q > \frac{1}{2}M$. Car, si l'on avait $Q > \frac{1}{2}M$, l'un des axes d'ordre q viendrait percer la sphère en un point X situé à l'intérieur de l'un des polygones sphériques ABCDE; l'une des distances angulaires de X aux sommets A, B, C, D serait nécessairement inférieure à AM, et *à fortiori* à AB (d'après le tableau synoptique des valeurs corrélatives de AB et AM), ce qui est contraire à l'hypothèse d'inclinaison minimum des deux axes OA, OB. Donc on ne peut avoir

$$Q > \frac{1}{2}M;$$

donc on aura

$$Q = \frac{1}{2}M.$$

---

[*] Les arcs AB, AM sont donnés par les formules connues,

$$\cos\frac{1}{2}AB = \operatorname{coséc}\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}, \quad \cos AM = \cot\frac{\pi}{q}\cot\frac{\pi}{r}.$$

Théorème XLII. — *Un polyèdre sphéroédrique ne peut avoir que des axes ternaires, quaternaires ou quinaires, les axes binaires non compris.*

Cela résulte de l'énoncé du théorème précédent; L^q étant l'un des axes du polyèdre, le nombre q ne peut être que le nombre d'angles plans susceptibles de s'associer pour former l'angle solide d'un polyèdre régulier : donc on doit avoir

$$q = 3, \quad \text{ou} \quad 4, \quad \text{ou} \quad 5.$$

Théorème XLIII. — *Il existe deux groupes distincts de polyèdres sphéroédriques, ceux qui possèdent quatre axes ternaires et ceux qui possèdent dix axes ternaires.*

Examinons successivement les quatre cas auxquels conduit la répétition des Q axes L^q les uns par les autres, et soit toujours M le nombre des sommets du polyèdre régulier inscrit auquel conduit ce mode de répétition.

Dans le cas du cube, on a (théorème XLI),

$$q = 3, \quad M = 8, \quad Q = \tfrac{1}{2}M = 4.$$

Dans le cas de l'octaèdre, on a

$$q = 4, \quad M = 6, \quad Q = \tfrac{1}{2}M = 3.$$

Les trois axes quaternaires ainsi obtenus sont rectangulaires; donc il existe alors quatre axes ternaires (théorème XIV), et il ne peut en exister un plus grand nombre; car les nouveaux axes ternaires forceraient les axes quaternaires à se répéter, de sorte que l'on aurait $Q > 3$, ce qui est impossible.

Dans le cas du dodécaèdre, on a

$$q = 3, \quad M = 20, \quad Q = \tfrac{1}{2}M = 10.$$

Dans le cas de l'icosaèdre, on a

$$q = 5, \quad M = 12, \quad Q = \tfrac{1}{2}M = 6.$$

Soient alors M, M_0, M_1, *fig.* 12, trois sommets voisins d'un icosaèdre inscrit : la normale abaissée du centre de la sphère sur la face MM_0M_1 sera évidemment un axe ternaire, et comme l'icosaèdre a vingt faces parallèles deux à deux, il y aura dix axes ternaires ; mais il ne peut y en avoir un plus grand nombre ; car, pour $q=3$, on ne trouve que les deux valeurs $Q=4$, $Q=10$ (théorème XLI). Donc, etc.

Corollaire. — Nous pouvons donc diviser les polyèdres sphéroédriques en deux groupes : les *quaterternaires* qui ont quatre axes ternaires assemblés comme le sont les quatre grandes diagonales d'un cube, et les *décemternaires* qui possèdent dix axes ternaires assemblés comme le sont les dix grandes diagonales d'un dodécaèdre régulier.

Cas des polyèdres quaterternaires.

Théorème XLIV. — *Si l'on construit un cube ayant pour diagonales les quatre axes ternaires d'un polyèdre quaterternaire donné, les trois normales abaissées du centre de figure sur les faces de ce cube sont trois axes de même espèce pour le polyèdre, et de symétrie binaire ou quaternaire*

En prenant pour centre le centre de figure du polyèdre, point de rencontre de ses quatre axes ternaires, et en prenant pour rayon l'unité, décrivons une sphère qui coupera les extrémités supérieures de nos quatre axes ternaires en A, A_0, A_1, A_2, *fig.* 11. (J'ai projeté stéréographiquement la surface de cette sphère sur le plan du grand cercle dont A est le pôle ; mais le lecteur est prié de suivre la démonstration comme si elle était faite sur la sphère : le centre O de celle-ci n'a point été marqué sur la figure.) Le cube inscrit dont A, A_0, A_1, A_2 sont les quatre sommets supérieurs, aura en B_0, B_1, B_2 les sommets diamétralement opposés à A_0, A_1, A_2 ; $AA_0B_1B_2$, $AA_0B_2A_1$, $AA_1B_0A_2$ sont trois polygones sphériques carrés dont les centres M_0, M_1, M_2 sont les extrémités des trois normales abaissées du centre sur les faces du cube inscrit.

Une double rotation de 120 degrés, savoir : premièrement autour de A_2 comme pôle, de A vers B_0, et secondement autour de B_0 comme pôle, de A_2

vers A_1, amène A en B_0 et A_2 en A_1, sans troubler le lieu des sommets : cette double rotation équivaut à une rotation de 180 degrés autour du pôle M_0. Donc OM_0 est un axe dont la symétrie est 2 ou un multiple de 2. D'ailleurs, la symétrie de OM_0 ne peut être d'ordre supérieur à 4 ; sans cela, le nombre des axes ternaires situés autour du pôle M_0 surpasserait 4, ce qui est contraire aux conditions initiales : donc les trois axes rectangulaires OM_0, OM_1, OM_2 sont binaires ou quaternaires.

THÉORÈME XLV. — *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent posséder aucun autre axe binaire.*

S'il existait un autre axe binaire, il ne pourrait percer la partie supérieure de la surface de la sphère, *fig.* 11, qu'en un des trois points qui sont les milieux soit des arcs AA_0, AA_1, AA_2, soit des arcs homologues A_0B_1, A_0B_2, A_1B_2, A_1B_0, A_2B_0, A_2B_1 ; car, pour toute autre position, cet axe forcerait les axes ternaires à se répéter, ce qui en doublerait le nombre. Supposons que G_0, milieu de AA_0, soit l'extrémité du nouvel axe binaire ; alors une double rotation du polyèdre, premièrement de 180 degrés autour du pôle G_0, deuxièmement de 120 degrés autour du pôle A_0, dans le sens A vers B_1, amènera

A en A_0, puis en A_0.
A_0 en A, puis en B_1,
B_1 en A_1, puis en A_2,
A_2 en B_2, puis en A.

Ce double mouvement, qui ne trouble pas les lieux des sommets du polyèdre, équivaut à une rotation simple de 90 degrés autour de M_1 dans le sens A vers A_0 ; donc alors le pôle M_1 serait l'extrémité d'un axe quaternaire, ce qui est contraire aux conditions initiales. Donc il ne peut alors exister aucun autre axe binaire.

Scolie. — Soit S, *fig.* 11, un sommet du polyèdre donné ; il est permis de supposer que ce sommet est sur la surface de la sphère, en prenant pour unité sa distance OS au centre de figure du polyèdre ; ses deux homologues par rapport au pôle ternaire A sont S′ et S″. Le système SS′S″ se repro-

duit en $S_0S'_0S''_0$, $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$, en vertu de la binarité des pôles M_0, M_1, M_2. Le système complet des homologues d'un même sommet sera donc, dans le cas actuel, un polyèdre inscriptible à la sphère.

Cette propriété, qui se reproduit dans tous les polyèdres sphéroédriques, sert de justification au nom que nous leur avons donné; nom qui figure d'ailleurs, avec un sens analogue, dans la terminologie cristallographique du célèbre professeur Weiss.

Corollaire. — D'après la disposition des douze sommets de ce polyèdre, il est facile de voir qu'il ne possède point de plans ni de centre de symétrie, du moins dans le cas général où le sommet S n'offre aucune particularité de position dans l'intérieur du triangle sphérique A_0A_2A (*voyez* la démonstration des deux théorèmes suivants).

THÉORÈME XLVI. — *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires peuvent posséder, soit six plans de symétrie coïncidant avec les six plans qui joignent deux à deux les axes ternaires, soit trois plans de symétrie coïncidant avec les trois plans qui joignent deux à deux les axes binaires; tout autre plan de symétrie ne saurait leur appartenir.*

Toute disposition d'un plan de symétrie autre que celles indiquées dans l'énoncé, obligerait les quatre axes ternaires à se répéter, et doit, par conséquent, être rejetée.

Si A_1AM_1, *fig.* 11, représente un des plans de symétrie, la ternarité du pôle A exige qu'il en soit de même de A_2AM_2, A_0AM_0; la ternarité du pôle A_1 force d'étendre cette conclusion aux plans $B_2A_1M_0$, $B_0A_1M_2$; il en sera de même de $A_0M_1A_2$, en vertu de la binarité de l'axe OM_1 (théorème XXIII).

Dans ce cas, chacun des triangles $SS'S''$, $S_0S'_0S''_0$, $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$, est remplacé par un hexagone; on s'est borné à figurer celui qui entoure le sommet B_0. Les vingt-quatre sommets du polyèdre peuvent se réduire à douze, si le sommet S, qui est censé le régulateur des positions de tous les autres, tombe sur l'un des trois arcs de grand cercle A_0AM_0, A_1AM_1, A_2AM_2; ces sommets peuvent se réduire à quatre, si S coïncide avec A, etc.

Supposons maintenant que $M_2G_0M_1$ représente un plan de symétrie;

alors $M_1G_2M_0$, $M_0G_1M_2$ seront aussi des plans de symétrie, en vertu de la ternarité du pôle A. Dans ce cas, le triangle $SS'S''$ se répète autour des pôles A_0, A_1, A_2 : on s'est borné à figurer ce mode de répétition autour du sommet A_1 ; le triangle $\sigma\sigma'\sigma''$ est alors l'homologue du triangle $SS'S''$ par rapport au plan de symétrie $M_2G_1M_0$.

D'ailleurs ces deux systèmes de plans de symétrie ne peuvent exister simultanément ; car il y aurait alors quatre plans de symétrie se coupant au pôle M_0, et l'axe OM_0 serait au moins quaternaire (théorème XI), ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé.

Théorème XLVII. — *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent avoir un centre de symétrie qu'à la condition de posséder trois plans de symétrie joignant deux à deux les axes binaires, et réciproquement la présence de ces plans entraîne celle du centre de symétrie.*

C'est une conséquence des théorèmes XXI et XXII.

Théorème XLVIII. — *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent avoir que trois modes distincts de symétrie, selon qu'ils sont dépourvus de plans de symétrie, ou qu'ils possèdent soit six plans de symétrie passant par les axes ternaires, soit trois plans de symétrie passant par les axes binaires.*

C'est une conséquence du corollaire du théorème XLV, ainsi que du théorème XLVI. Si l'on tient compte en outre du théorème XLVII et des conventions faites à la page xxv, on aura les trois symboles

$$[4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ oP],$$
$$[4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2],$$
$$[4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ 6P].$$

Théorème XLIX. — *Tout polyèdre quaterternaire à axes quaternaires possède six axes binaires joignant deux à deux les côtés opposés d'un cube qui aurait les quatre axes ternaires du polyèdre pour diagonales.*

Je dis que, si l'on joint le centre O de la sphère de la *fig.* 11 avec le point G_0 milieu de AA_0, cette droite sera un axe binaire du polyèdre.

Donnons au polyèdre une rotation de 90 degrés autour de OM_1, de A vers A_0, et une seconde rotation de 120 degrés autour de OA_0, de B_1 vers A; ce double mouvement, qui ne troublera pas les lieux apparents des sommets, amènera

A en A_0, puis en A_0,
A_0 en B_1, puis en A,
B_1 en A_2, puis en A_1,
A_2 en A, puis en B_2.

Le résultat de ces deux rotations est le même que si l'on avait fait tourner le polyèdre de 180 degrés autour de G_0; donc OG_0 est un axe d'ordre pair, qui évidemment ne peut être que binaire, et il en serait de même pour les cinq autres droites homologues de OG_0. Trois des six axes binaires sont situés dans le plan du grand cercle de projection de la sphère.

On prouverait, de même que cela a été déjà fait dans la démonstration du théorème XLV, que toute autre droite serait impropre à être un axe binaire du système.

Théorème L. — *Les polyèdres quaterternaires à axes quaternaires, s'ils possèdent des plans de symétrie, en ont nécessairement six passant par les axes ternaires, et trois passant par les axes quaternaires; ils ont en même temps un centre de symétrie.*

Je désignerai par P^4 les plans passant par les axes quaternaires, par P^2 ceux qui passent par les axes ternaires. On a déjà vu (démonstration du théorème XLVI) que ce sont les seuls plans de symétrie possibles.

Admettons l'existence des plans P^4; $M_0G_1M_2$ et $M_0G_2M_1$, *fig.* 11, seront deux plans de symétrie se coupant suivant un axe quaternaire; donc AM_0B_0, $A_1M_0A_2$ seront aussi des plans de symétrie (théorème XXV): le système P^2 s'associe donc au système P^4. On démontrerait de même que le système des plans P^4 s'associe toujours au système des plans P^2.

Les trois plans du système P^4 sont normaux chacun à l'un des trois axes

quaternaires. Les six plans du système P^2 sont normaux chacun à l'un des six axes binaires; car, si dans un cube à quatre arêtes verticales on joint deux à deux les milieux de deux de ces quatre arêtes opposées entre elles, chacune de ces droites sera normale au plan qui passe par les deux autres arêtes. L'existence des plans de symétrie entraînera d'ailleurs celle du centre de symétrie (théorème XXII).

Théorème LI. — *Les polyèdres quaterternaires à axes quaternaires ne sont susceptibles que de deux modes de symétrie, selon qu'ils possèdent ou ne possèdent pas de plans de symétrie.*

Cela résulte du théorème précédent.

Dans le cas où le polyèdre ne possède aucun plan de symétrie, il ne peut avoir de centre de symétrie, par suite du théorème XXI. Le système complet des homologues du sommet S, *fig.* 11, forme alors un polyèdre inscrit, à vingt-quatre sommets se groupant trois par trois autour de chacun des huit pôles A, A_0, A_1, A_2, B_0, etc. On s'est borné, dans la figure, à représenter le triangle $\sigma_2 \sigma'_2 \sigma''_2$ qui enveloppe, dans ce cas, le pôle A_2.

Lorsque le polyèdre a ses neuf plans de symétrie, les huit triangles SS′S″, $S_0 S'_0 S''_0$, etc., sont remplacés par huit hexagones, et le système des homologues comprend quarante-huit sommets.

Les symboles de ces deux modes de symétrie seront

$$[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ 0C,\ 0P],$$
$$[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ \ C,\ 3P^4,\ 6P^2].$$

Cas des polyèdres décemternaires.

Théorème LII. — *Si l'on construit un dodécaèdre régulier ayant pour diagonales les dix axes ternaires d'un polyèdre décemternaire donné, les six normales abaissées du centre de figure sur les faces de ce dodécaèdre sont des axes de symétrie quinaire pour le polyèdre.*

En prenant l'unité pour rayon, et pour centre le point de mutuelle rencontre des dix axes ternaires, décrivez une sphère qui coupera en A_0, A_1,

A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, *fig.* 12, les moitiés supérieures des dix axes ternaires. (J'ai projeté stéréographiquement la surface de cette sphère sur le plan du grand cercle parallèle à la face $A_0A_1A_2A_3A_4$ du dodécaèdre régulier inscrit dont ces extrémités A_0, A_1,..., B_0, B_1, etc., sont les sommets; le lecteur est prié de se représenter les points et lignes de la figure sur la surface même de la sphère; le centre O de la sphère n'est pas marqué sur le dessin.) En joignant deux à deux les intersections, il en résulte des pentagones réguliers sphériques dont les douze centres M, M_0, M_1,... N_0, N_1, etc., sont les extrémités de rayons menés du centre de la sphère normalement aux douze faces du dodécaèdre.

Deux rotations de 120 degrés, l'une autour de OA_0, de A_4 vers B_0, et l'autre autour de OB_0, de A_0 vers C_2, amèneront A_4 en B_0 et A_0 en C_2. Ces deux rotations, qui n'altèrent pas les lieux des sommets du polyèdre, équivalent à une rotation unique de 144 degrés autour de OM_2, de A_0 vers B_0; celle-ci répétée trois fois équivaudra à une rotation de 72 degrés; donc l'axe OM_2 est un axe quinaire, et il en serait de même pour OM, OM_0, OM_1, etc. Les points M_0, M_1, etc., sont les sommets d'un icosaèdre régulier inscrit à la sphère.

Théorème LIII. — *Les polyèdres décemternaires possèdent toujours quinze axes binaires.*

Faites tourner le polyèdre donné de 72 degrés autour de OM, *fig.* 12, de A_0 vers A_1, puis de 120 degrés autour de OA_1, de A_2 vers A_0; par suite de ces deux mouvements, le pôle A_0 vient en A_1, et A_1 vient en A_0; le résultat final est le même que si le polyèdre avait tourné de 180 degrés autour du rayon OG, aboutissant au milieu de l'arc A_0A_1. Or, les lieux apparents des sommets n'ont pas été altérés; donc G est l'extrémité d'un axe d'ordre pair, qui est évidemment un axe binaire. Le dodécaèdre régulier ayant trente côtés opposés deux à deux, le nombre total des axes binaires sera égal à quinze.

Aucun autre diamètre de la sphère ne saurait être un axe binaire; car, quelle que fût sa position, il forcerait les axes ternaires à se répéter, et l'on aurait plus de dix axes ternaires, ce que nous savons être impossible (théorème XLIII).

On pourrait aussi obtenir les quinze axes binaires, en joignant deux à deux les milieux des arêtes opposées de l'icosaèdre inscrit $MM_0M_1, \ldots$.

Théorème LIV. — *Les polyèdres décemternaires peuvent avoir pour plans de symétrie les quinze plans passant par les six axes quinaires combinés deux à deux; dans le cas contraire, ces polyèdres n'ont aucun plan de symétrie.*

Considérons en particulier un plan passant par le centre de la sphère et par les sommets M et M_3, *fig.* 12; ce plan sera un plan de symétrie pour le système des points (A_0, A_1), $(A_4, A_2), \ldots$, (M_2, M_4), (M_1, M_0), etc. : il n'entraîne donc pas la duplication du nombre des axes; ainsi rien ne s'oppose à l'existence d'un tel plan de symétrie.

D'ailleurs le plan MM_3 est perpendiculaire à la droite KK', qui est un axe binaire du système. Les homologues de ce plan sont, en tout, au nombre de quinze, savoir : MM_0, MM_1, MM_2, MM_3, MM_4; M_0M_2, M_1M_3, M_2M_4, M_3M_0, M_4M_1; M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_0. Ce sont évidemment les seuls plans de symétrie que puisse posséder le polyèdre; pour toute autre position, le nombre des axes ternaires deviendrait supérieur à 10, ce qui ne peut être (théorème XLIII).

La *fig.* 12 offre la disposition des soixante sommets homologues de S autour des pôles A_0, A_1, etc., dans le cas où le polyèdre ne possède aucun plan de symétrie.

Mais lorsque les quinze plans de symétrie ci-dessus indiqués existent dans le polyèdre, le triangle $SS'S''$ est remplacé par un hexagone; pour ne pas surcharger la figure, on s'est borné à représenter l'un de ces hexagones, celui qui environnerait le pôle B_0. Le système des homologues de S comprend alors cent vingt sommets; pour certaines positions particulières de S, ce nombre peut se réduire à soixante, à vingt, et même à douze sommets. Ce dernier cas se réalise, si le sommet S est situé à l'extrémité de l'un des axes quinaires du système.

Théorème LV. — *Lorsqu'un polyèdre décemternaire possède les quinze plans de symétrie indiqués dans l'énoncé du théorème précédent, ces plans*

sont normaux aux quinze axes binaires, et le polyèdre possède un centre de symétrie; il en est dépourvu dans le cas contraire.

Il résulte de la démonstration du théorème précédent que l'axe binaire KOK', *fig.* 12, est normal au plan M_2GMA_2. Or ce plan est l'un des quinze plans de symétrie du polyèdre; donc chacun de ces plans est normal à l'un des quinze axes binaires : donc le polyèdre possède alors un centre de symétrie (théorème XXII). Mais si le polyèdre était dépourvu de plans de symétrie, il ne pourrait avoir de centre de symétrie, à cause de ses axes binaires (théorème XXI).

Théorème LVI. — *Les polyèdres décemternaires ont deux modes distincts de symétrie, selon qu'ils ont ou non un centre de symétrie.*

C'est une conséquence des théorèmes LIV et LV.

Les symboles de ces deux modes seront

$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ 0C,\ 0P],$$
$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15p^2].$$

Théorème LVII. — *Les axes qui caractérisent la symétrie des polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires entrent aussi dans la symétrie des polyèdres décemternaires.*

Choisissons arbitrairement un sommet d'axe ternaire tel que A_2, *fig.* 12 : le milieu G de l'un des deux côtés A_1A_0, A_3A_4 adjacents au côté A_0A_4, qui est l'opposé du sommet A_2 dans le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$, sera l'extrémité d'un axe binaire (théorème LIII) : il en sera de même des points H, K qui sont les homologues de G par rapport à l'axe ternaire OA_2. Dans le triangle sphérique HGK, les trois angles H, G, K sont droits; donc les trois côtés HG, KG, HK sont égaux à 90 degrés.

Les trois axes OG, OH, OK sont donc trois axes binaires rectangulaires, et le triangle sphérique GHK est trirectangle. Le sommet A_2 est le centre de ce triangle. De même A_1 sera le centre du triangle trirectangle GHK', B_0 celui

i

du triangle trirectangle GK'H', H' étant l'extrémité inférieure de l'axe OH, et B_1 celui du triangle trirectangle KGH'.

Les quatre axes ternaires OA_2, OA_4, OB_0, OB, se combinent donc avec trois axes binaires rectangulaires, dans les conditions de situation relative qui caractérisent les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires.

Scolie. — A la combinaison OA_2, OA_4, OB_0, OB, on pourrait substituer l'une quelconque des quatre combinaisons suivantes

$$[OA_0,\ OA_3,\ OB_1,\ OB_2],\quad [OA_0,\ OA_2,\ OB_3,\ OB_4],$$
$$[OA_1,\ OA_3,\ OB_0,\ OB_4],\quad [OA_1,\ OA_4,\ OB_2,\ OB_3].$$

THÉORÈME LVIII. — *Les polyèdres* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P]$ *possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres* $[4L^3, 3L^2, 0C, 0P]$; *les polyèdres* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15p^2]$ *possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres* $[4L^3, 3L^2, C, 3p^2]$.

La partie de cet énoncé, relative aux axes de symétrie, a déjà été démontrée dans le théorème précédent; on en conclut facilement que les polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P]$ possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres $[4L^3, 3L^2, 0C, 0P]$.

Si, de plus, le polyèdre décemternaire contient quinze plans de symétrie, les plans KG, GH, HK de la *fig.* 12 en feront partie, et représenteront les plans $3p^2$ des polyèdres $[4L^3, 3L^2, C, 3p^2]$. Le centre de symétrie C existant de part et d'autre, on voit que la symétrie caractérisée par $[4L^3, 3L^2, C, 3p^2]$ sera comprise dans celle plus complète des polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15p^2]$.

Nota. — Les théorèmes LVII et LVIII n'intéressent que d'une manière indirecte la théorie générale des polyèdres symétriques. Ils figurent ici, en vue des applications que l'on peut en faire, dans la cristallographie, à l'étude des corps du Système cubique.

Classification des polyèdres d'après la nature de leur symétrie, avec indication du nombre minimum de leurs sommets.

POLYÈDRE	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE DU POLYÈDRE.	CLASSE du POLYÈDRE.	NOMBRE MINIMUM DES SOMMETS DE			
			1re ESPÈCE.	2me ESPÈCE.	3me ESPÈCE.	4me ESPÈCE.
asymetrique.	$0L, 0C, 0P$	1re	1	1	1	1
symetrique, depourvu d'axes.	$0L, C, 0P$	2me	2	2	2	
symetrique, depourvu d'axes.	$0L, 0C, P$	3me	1	1	1	
symetrique, pourvu d'un axe principal, d'ordre pair.	$A^{2q}, 0L^2, 0C, 0P$	4me	$2q$	$2q$		
	$A^{2q}, 0L^2, C, \Pi$	5me	$2q$	$2q$		
	$A^{2q}, qL^2, qL'^2, 0C, 0P$	6me	$4q$			
	$A^{2q}, 0L^2, 0C, qP, qP'$	7me	$2q$	1		
	$A^{2q}, qL^2, qL'^2, C, \Pi, qP^2, qP'^2$	8me	$2q$	0 ou $2q$ (*)		
	$A^{2q}, 2qL^2, 0C, 2qP$	9me	$4q$			
symetrique, pourvu d'un axe principal, d'ordre impair.	$A^{2q+1}, 0L^2, 0C, 0P$	10me	$2q+1$	$2q+1$		
	$A^{2q+1}, 0L^2, C, 0P$	11me	$4q+2$	$4q+2$		
	$A^{2q+1}, 0L^2, 0C, \Pi$	12me	$2q+1$	$2q+1$		
	$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, 0C, 0P$	13me	$4q+2$			
	$A^{2q+1}, 0L^2, 0C, (2q+1)P$	14me	$2q+1$	1		
	$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, C, (2q+1)P^2$	15me	$4q+2$			
	$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, 0C, \Pi, (2q+1)P$	16me	$2q+1$			
symetrique, spheroedrique, quaterternaire.	$4L^3, 3L^2, 0C, 0P$	17me	12			
	$4L^6, 3L^4, C, 3P^2$	18me	12			
	$4L^6, 3L^4, 0C, 6P$	19me	4			
	$3L^4, 4L^3, 6L^2, 0C, 0P$	20me	24			
	$3L^4, 4L^6, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2$	21me	6			
symetrique, spheroedrique, decemternaire.	$6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P$	22me	60			
	$6L^{10}, 10L^6, 15L^4, C, 15P^2$	23me	12			

(*) Le nombre minimum des sommets de 2me espèce est égal à $2q$, si $q=1$, et à 0, si $q>1$.

Ce tableau offre une classification des polyèdres en vingt-trois classes, d'après les principes exposés dans ce Mémoire. Pour l'interprétation des symboles A, L, L', C, Π, P, P', on consultera la page xxv.

On remarquera que les classes 4me, 5me, jusqu'à la 16me inclusivement, se subdivisent elles-mêmes en différents ordres, d'après le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe principal.

Veut-on, d'après ce tableau, connaitre les éléments intégrants de la symétrie d'un polyèdre de la 7me classe, 4me ordre? Son symbole sera

$$[A^4,\ oL^2,\ oC,\ 2P,\ 2P'];$$

d'où l'on voit que ce polyèdre possède un axe quaternaire, quatre plans de symétrie passant par cet axe, et croisés à 45 degrés, deux plans d'une première espèce rectangulaires entre eux, et deux autres pareillement rectangulaires entre eux, mais d'une autre espèce que les précédents, pas d'axe binaire, ni de centre de symétrie.

Les quatre dernières colonnes font connaître le nombre minimum de sommets de chaque polyèdre : tous les sommets de même espèce forment un système de sommets homologues, et il existe autant de tels systèmes d'homologues que d'espèces différentes de sommets, dans le polyèdre.

Avec un peu de réflexion, on trouvera facilement la figure que doit avoir le polyèdre à nombre minimum de sommets. Ainsi le polyèdre le plus simple sera :

Dans la 1re classe, le tétraèdre irrégulier;
Dans la 2me classe, l'octaèdre irrégulier à bases parallélogrammiques;
Dans la 3me classe, le triangle scalène;
Dans la 19me classe, le tétraèdre régulier;
Dans la 21me classe, l'octaèdre régulier;
Dans la 23me classe, l'icosaèdre régulier, etc.

Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie, par M. A. Bravais.

Fig. 1.

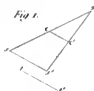
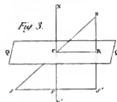


Fig. 2.



Fig. 3.



Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, par M. A. Bravais.

Fig. 1.

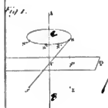


Fig. 2.

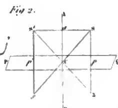


Fig. 3.



Fig. 4.

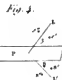


Fig. 5.

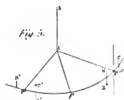


Fig. 6.

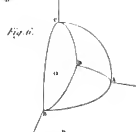


Fig. 7.

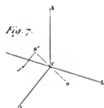


Fig. 8.

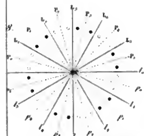


Fig. 9.

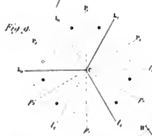
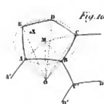


Fig. 10.



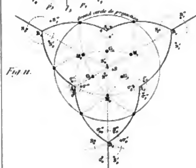


Fig. 11.

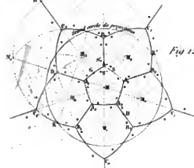


Fig. 12.

Gravé par E. Wormser

MÉMOIRE

SUR

LES SYSTÈMES FORMÉS PAR DES POINTS

DISTRIBUÉS RÉGULIÈREMENT SUR UN PLAN OU DANS L'ESPACE.

XXXIIIe Cahier.

MÉMOIRE

SUR

LES SYSTÈMES FORMÉS PAR DES POINTS

DISTRIBUÉS RÉGULIÈREMENT SUR UN PLAN OU DANS L'ESPACE;

PAR M. A. BRAVAIS,

LIEUTENANT DE VAISSEAU, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 11 décembre 1848.)

§ I. — DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

Pour obtenir un système de points distribués régulièrement dans l'espace, prenons deux points arbitrairement, et joignons-les l'un à l'autre par une ligne droite que nous prolongerons indéfiniment dans les deux sens. Chargeons cette droite d'une série illimitée d'autres points, tous équidistants entre eux, et séparés par un intervalle constant, égal à la distance des deux points primordiaux. Le système rectiligne de ces points équidistants recevra, dans le cours de ce Mémoire, le nom de *Rangée*. L'intervalle fondamental qui sépare deux points voisins sera désigné sous le nom de *paramètre* de la Rangée.

Prenons une deuxième Rangée de même paramètre; plaçons-la parallèlement à la précédente, dans une situation relative arbitrairement choisie, et joignons entre elles ces deux Rangées par un plan géométrique qui, de sa

nature, sera illimité en tous sens. Chargeons ce plan d'une série de Rangées pareilles, parallèles et équidistantes entre elles ; enfin, pour fixer la position de ces Rangées, faisons glisser chacune d'elles, tout d'une pièce et dans le sens de sa longueur, jusqu'à ce que les points qui, sur chaque Rangée, servent de départ à toute la série de ses points, soient situés sur une même droite, plus ou moins inclinée sur la direction commune des Rangées. Nous désignerons sous le nom générique de *Réseau* une telle réunion de points ainsi distribués sur le plan.

Prenons un second Réseau de mêmes forme et grandeur que le précédent ; plaçons-le sur un plan parallèle, séparé du premier par un intervalle arbitraire, en ayant soin que toutes les lignes homologues soient semblablement dirigées dans les deux Réseaux, ce qui peut se faire par le transport commun de toutes les parties du Réseau primitif, parallèlement à elles-mêmes. Disposons une infinité de Réseaux semblables et semblablement tournés, sur une infinité de plans parallèles aux deux premiers, tous équidistants entre eux, et prenons le soin de faire glisser chaque Réseau dans son plan, jusqu'à ce que tous les points qui servent de départ soient situés sur une même droite, nécessairement extérieure au plan du Réseau primitif. Le système de points ainsi obtenu sera désigné sous le nom d'*Assemblage* dans le cours de ce Mémoire ; il est illimité suivant ses trois dimensions.

La *fig.* 1 offre le résultat des opérations que nous venons d'effectuer : OAA'A''... est la première Rangée ; la série des points A, A', A'',..., doit, par la pensée, être supposée prolongée à gauche de O ; BPP'... forme la seconde Rangée. Des points B', B'',..., partent d'autres Rangées pareilles et parallèles ; les têtes de Rangées O, B, B', B'',..., sont assujetties à être en ligne droite. Toutes ces Rangées étant équidistantes, il est évident que l'on a

$$OB = BB' = B'B''...;$$

de sorte que OBB'B''... est aussi une Rangée du système : mais elle diffère de OAA'A''... par sa direction, et aussi, dans le cas général, par la grandeur de son paramètre, qui est évidemment égal à OB.

Un second Réseau, pareil au Réseau OAA'A''... BPP'... B'B''..., a son point de départ en D, et s'étend, à partir de D, dans un plan parallèle au plan OAB ; sa première Rangée est DQQ'Q''... ; les autres partent de R, R', R'',....

Ces points sont, sur le nouveau plan, les homologues de B, B′, B″,.... Les autres Réseaux du système partent des points D′, D″,.... Tous les points O, D, D′, D″,..., sont en ligne droite, et, par suite de l'équidistance des plans parallèles qui contiennent chacun des Réseaux, on a

$$OD = DD' = D'D''...;$$

de sorte que ODD′D″... est aussi une Rangée, mais qui différera de OAA′A″..., OBB′B″... par la direction et par la grandeur de son paramètre.

L'Assemblage ainsi obtenu offre une distribution régulière caractérisée par les propriétés suivantes, assez évidentes pour n'exiger aucune démonstration.

Aucun des points intégrants ne se distingue des autres par une particularité quelconque de position relative.

La configuration formée par l'Assemblage, supposé illimité, autour d'un de ses points arbitrairement choisi, est la même, quel que soit le point adopté. Si, par exemple, ce point est pris pour origine de coordonnées quelconques rectangulaires ou obliques, on retrouvera, autour de chaque point pris successivement pour origine, des points semblablement situés et de mêmes coordonnées, pourvu que, dans le changement d'origine, les nouveaux axes aient conservé leur direction première.

Avant de passer outre, j'affecterai une désignation particulière aux points qui composent un Réseau ou un Assemblage. Il convient, en effet, de les distinguer d'avec les points purement mathématiques qui existent en un lieu quelconque de l'espace.

En conséquence, je les appellerai des *Sommets*. On peut, sans inconvénient et pour fixer les idées, attribuer à ces Sommets des dimensions très-petites, en faire de véritables molécules, et attacher spécialement le nom de Sommet aux centres de figure de ces molécules dont la forme polyédrale restera d'ailleurs indéterminée.

Je supposerai ces Sommets liés entre eux par des forces telles, que l'Assemblage entier soit invariable de forme, toutes les distances mutuelles restant les mêmes, mais soit cependant susceptible de se mouvoir dans l'espace comme un corps solide, soit parallèlement à lui-même, soit en tournant

autour d'un axe donné, toutes les fois qu'il sera nécessaire de lui imprimer de tels mouvements de translation ou de rotation.

Si l'on transporte tout le système parallèlement à lui-même, un Sommet tel que A (*fig.* 1) venant occuper le lieu qu'occupait précédemment un autre Sommet tel que B, chacun des autres Sommets viendra pareillement occuper un lieu de l'espace, abandonné par l'un des Sommets du système à l'origine du mouvement. Je dis alors que *le lieu des Sommets n'a pas été troublé* par le mouvement général imprimé à l'Assemblage, ou plus simplement, qu'il y a eu *restitution des lieux des Sommets.*

Tant que les droites OAA′, BPP′,... et les plans qui les unissent restent tracés dans l'espace, l'Assemblage de la *fig.* 1 conserve l'empreinte des opérations qui ont servi à le construire. Mais nous pouvons supprimer par la pensée toutes ces droites et tous ces plans, et chercher à résoudre un problème inverse de celui qui vient de nous occuper, problème dont l'énoncé sera le suivant :

Problème I. — *Un Assemblage étant donné, retrouver les Rangées, plans et Réseaux qui peuvent le produire.*

Prenons au hasard deux points ou Sommets, tels que O et A (*fig.* 1), appartenant à l'Assemblage donné, et joignons-les par la droite OA ; s'il existait sur la droite de jonction, entre O et A, d'autres Sommets a, b, c,..., appartenant au système, nous considérerions spécialement le Sommet a le plus voisin de O, et Oa serait alors un sous-multiple exact de OA. Ainsi l'on peut toujours supposer qu'entre les Sommets choisis O et A, il n'existe aucun autre Sommet intermédiaire.

Prolongeons OA dans les deux sens, et prenons

$$AA' = OA, \quad A'A'' = AA', \ldots ;$$

tous ces points A′, A″... appartiendront à notre Assemblage en vertu de la loi générale qui caractérise la distribution régulière. Cette première opération détermine l'une des Rangées du système. Il importe toutefois de remarquer que la Rangée ainsi retrouvée n'est pas nécessairement l'une de celles qui ont servi dans l'origine à construire l'Assemblage.

En dehors de la Rangée OAA′A″..., prenons au hasard un Sommet B et joignons OB : si d'autres Sommets existaient entre O et B, nous ne conser-

verrions que le plus voisin de O. Ainsi nous pouvons toujours supposer qu'entre O et B, il n'existe aucun autre point appartenant au système de l'Assemblage.

Cela posé, sur OB et OA construisons le parallélogramme OAPB; P appartiendra au Réseau du plan OAB. Or, dans l'intérieur de ce parallélogramme, il pourra exister généralement un nombre fini de Sommets, tels que m, n,..., appartenant au Réseau du plan. Dans ce cas, on devra rejeter le point B, et le remplacer par celui de ces Sommets dont la distance à OA est un minimum. Appelons-le m; menons de m la droite mm' parallèle et égale à OA, et achevons le parallélogramme OA$m'm$. Non-seulement m appartiendra au Réseau, mais on pourra affirmer que le parallélogramme O$m'm$A n'offre ni dans son intérieur, ni sur ses côtés, aucun point de l'Assemblage général, sauf les quatre Sommets O, A, m, m'.

Pour ne pas compliquer inutilement la *fig.* 1, je reprends le parallélogramme OAPB, et me borne à supposer que le point B a été choisi de manière à satisfaire aux deux conditions suivantes :

1°. Qu'entre O et B il n'existe aucun point de l'Assemblage ;

2°. Qu'il n'en existe pas non plus dans l'intérieur du parallélogramme construit sur OA et OB. Nous venons de voir qu'il existe toujours au moins un Sommet satisfaisant à ces conditions.

Alors, connaissant les paramètres OA et OB des deux Rangées, non-seulement nous pourrons trouver tous les Sommets appartenant à ces Rangées, mais, par les intersections de deux systèmes de parallèles menés par A, A', A'',..., et par B, B', B'',..., nous pourrons reconstituer intégralement le Réseau du plan OAB. Remarquons que ce Réseau n'est pas nécessairement le même que celui qui, dans l'origine, a servi à la construction de l'Assemblage.

Après avoir successivement obtenu une Rangée, puis un Réseau, il ne nous sera pas plus difficile de retrouver le système entier.

Nous choisirons hors du plan OAB un Sommet D, en l'assujettissant à la condition qu'il n'existe aucun Sommet intermédiaire, ni entre O et D sur la ligne de jonction, ni sur la surface du parallélogramme AODQ, ni sur celle du parallélogramme BODR, ni dans l'intérieur du parallélipipède OAPSQDRB, construit sur les paramètres OA, OB, OD comme arêtes. On

s'assurera, comme nous l'avons fait pour le point B, dans le cas du plan, que ces conditions sont en effet réalisées.

Il est un moyen simple d'obtenir directement le point D : il consiste à faire mouvoir un plan géométrique parallèlement à lui-même, à partir d'une position initiale dans laquelle il coïncidera avec le plan OAB. Dès que ce plan, dans son mouvement de transport, atteindra un premier Sommet de l'Assemblage, on l'adoptera comme étant le point cherché, et l'on fera de la distance OD le paramètre de la troisième Rangée ODD'D''....

La solution que nous venons de donner prouve que l'on peut résoudre le problème I d'un très-grand nombre de manières différentes, et même il n'est pas difficile de voir que le nombre de ces solutions est infini. En effet, le plan DQSR jouit, dans le système de tous ses parallèles, de la propriété d'être aussi près que possible du plan OAB. Si nous considérons un Sommet quelconque, tel que S, appartenant au Réseau que supporte ce plan, il est évident que nous pouvons remplacer la Rangée OD par la nouvelle Rangée OS; nous obtiendrons alors tous les points de l'Assemblage donné, au moyen des intersections du système des plans parallèles à OAB, par le système des droites menées de chaque point du Réseau OAA'...BB'... parallèlement à OS.

De même, en prenant OS et OA, ou OS et OB pour Rangées primordiales, on pourrait reconstruire l'Assemblage, en prenant pour intermédiaire le Réseau du plan OAS ou celui du plan OBS, ce qui nous donnerait de nouvelles solutions du problème; et puisque le nombre de Sommets d'un Réseau est infini, le nombre de ces solutions l'est également.

Lorsque, dans un Réseau, deux Rangées OA, OB seront telles, qu'aucun Sommet ne tombe dans l'intérieur du parallélogramme construit sur les paramètres OA, OB de ces Rangées, je dirai que ces Rangées sont *conjuguées;* et dans le cas où elles seraient prises pour axes coordonnés, elles prendront le nom d'*axes conjugués*.

Le système des Rangées parallèles à deux Rangées conjuguées OAA', OBB',..., découpe le Réseau en cases parallélogrammiques, toutes égales entre elles. J'appellerai ce parallélogramme (OAPB, *fig.* 1), (OA*m*B, *fig.* 2), *parallélogramme générateur* ou *maille parallélogrammique du Réseau*.

L'espace indéfini compris entre une Rangée telle que OAA'A''..., et sa

plus proche voisine BPP′ (*fig.* 1), recevra le nom de *bande*. La bande est caractérisée par cette particularité, qu'il n'existe jamais aucun Sommet dans son intérieur, mais seulement sur les deux droites qui la limitent.

Les deux Rangées parallèles qui contiennent une bande entre elles seront dites *limitrophes*. A chaque Rangée correspondent deux Rangées limitrophes, situées de côtés opposés par rapport à la Rangée donnée. Le plan d'une bande, ou de deux Rangées parallèles, ou, plus généralement, le plan qui contient trois Sommets, non en ligne droite, sera appelé *plan réticulaire :* il porte sur sa surface un Réseau complet de Sommets.

Si, dans l'espace, les paramètres des trois Rangées OA, OB, OC (*fig.* 1) peuvent servir d'arêtes à un parallélipipède vide de tout Sommet dans son intérieur, ainsi que sur ses faces latérales, je désignerai ces trois Rangées sous le nom de *Rangées conjuguées*, et sous le nom d'*axes conjugués*, dans le cas où l'on jugerait convenable de les prendre pour axes coordonnés.

Les trois plans qui réunissent deux à deux ces Rangées seront appelés des *plans réticulaires conjugués* ou *plans conjugués*.

Une Rangée sera dite *conjuguée d'un plan réticulaire* lorsque, en prenant sur ce plan deux Rangées conjuguées relativement au Réseau de ce plan, elles seront conjuguées avec la Rangée donnée.

L'espace indéfini compris entre un plan réticulaire et son plus proche voisin, parmi les plans réticulaires qui lui sont parallèles, sera désigné sous le nom de *strate*. Il ne peut exister aucun Sommet dans l'intérieur d'une strate.

Les deux plans réticulaires parallèles qui limitent la strate seront dits *limitrophes*. A chaque plan réticulaire correspondent deux plans limitrophes qui lui sont parallèles, et situés de côtés opposés par rapport au plan donné.

Les trois systèmes de plans réticulaires parallèles aux trois plans conjugués AOB, AOD, BOD (*fig.* 1), découpent l'espace en cellules parallélipipédiques, toutes égales et superposables. J'appellerai le parallélipipède ainsi obtenu, et construit sur les trois paramètres conjugués OA, OB, OD, *parallélipipède générateur* ou *noyau* de l'Assemblage.

La juxtaposition de tels parallélipipèdes faces contre faces reproduit tous les Sommets de cet Assemblage.

La fixation de notre terminologie nous permet de résumer les propriétés fondamentales dont jouit un Assemblage quelconque.

« Les Sommets d'un Assemblage sont rangés sur un système de plans
» parallèles et équidistants, et forment, sur chacun de ces plans, un Réseau
» dont la configuration est la même sur chaque plan.

» Dans chacun de ces Réseaux, les Sommets forment des systèmes de
» Rangées parallèles, superposables et équidistantes.

» Sur chaque Rangée, les Sommets sont également espacés entre eux.
» On peut toujours reproduire les Sommets donnés d'un Réseau par les
» intersections, deux à deux, de deux systèmes distincts de droites parallèles
» et équidistantes : tout le plan se trouve alors découpé en cases paral-
» lélogrammiques superposables, et qui ne laissent entre elles aucun espace
» vide.

» On peut toujours reproduire les Sommets d'un Assemblage par les in-
» tersections, trois à trois, de trois systèmes distincts de plans parallèles et
» également distants dans chaque système : l'espace est alors découpé en
» cellules parallélipipédiques, toutes égales, superposables, et ne laissant
» entre elles aucun espace vide.

» La décomposition du plan ou de l'espace en parallélogrammes ou
» parallélipipèdes égaux, dont les sommets coincident avec les Sommets de
» l'Assemblage, peut se faire d'une infinité de manières différentes. »

§ II. — Des Réseaux en général.

Notations, définitions. — Nous allons considérer le Réseau de la *fig.* 2. Le Sommet O sera pris pour origine des coordonnées.

Soient OAA'..., OBB'..., les deux Rangées qui ont servi à construire le Réseau, et désignons par a, b les deux paramètres, de sorte que l'on ait

$$(1) \qquad OA = a, \qquad OB = b.$$

Soient ξ, η les coordonnées linéaires des points du plan rapportées aux axes obliques OA, OB. Pour un Sommet quelconque P, les rapports $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$,

seront des nombres entiers, positifs ou négatifs, que nous appellerons les *coordonnées numériques* du Sommet P, et qui seront représentés par les lettres m, n, si P est un Sommet déterminé, et par les lettres x, y, si P est un Sommet indéterminé du Réseau. On aura, suivant les cas,

(2) $$\frac{\xi}{a} = m, \quad \frac{\eta}{b} = n,$$

(3) $$\frac{\xi}{a} = x, \quad \frac{\eta}{b} = y.$$

L'équation générale du Réseau, considéré comme étant une courbe plane à branches séparées, et évanouissantes en chaque Sommet du Réseau, peut s'écrire analytiquement sous la forme suivante :

$$\sin^2 \frac{\xi}{a} \pi + \sin^2 \frac{\eta}{b} \pi = 0,$$

π étant le nombre 3,14159.... Cette équation est satisfaite pour chaque Sommet, et cesse de l'être pour tout autre point du plan.

Problème II. — *Trouver l'équation d'une Rangée passant par l'origine et par le Sommet* P (fig. 2).

Soient m, n les coordonnées numériques de P; l'équation de OP en coordonnées linéaires et courantes sera

$$\frac{\xi}{ma} = \frac{\eta}{nb}.$$

Soient x, y les coordonnées numériques d'un Sommet quelconque appartenant à la Rangée OP; on aura

(4) $$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} :$$

c'est l'équation en coordonnées numériques de la Rangée OP.

Si m et n avaient un plus grand diviseur commun D, le point $\frac{m}{D}$, $\frac{n}{D}$ appartiendrait à la Rangée OP, et serait, de tous les Sommets de cette Rangée, le plus rapproché du Sommet O; mais si m et n sont premiers entre eux, OP est le paramètre de la Rangée.

On peut mettre l'équation (4) sous la forme

(5) $$nx - my = 0.$$

Si l'on pose alors

$$(6) \qquad \frac{n}{D} = g, \quad \frac{m}{D} = -h,$$

g et h étant des nombres entiers, premiers entre eux, positifs ou négatifs, l'équation devient

$$(7) \qquad gx + hy = o.$$

THÉORÈME I. — *Si* m, M (fig. 3) *sont deux Sommets d'un Réseau, et si, par un troisième Sommet* O, *on mène une droite* On *égale et parallèle à* mM, *l'extrémité de cette droite sera un quatrième Sommet du Réseau.*

Transportons l'origine des coordonnées successivement en m et en O, sans changer la direction des axes ; nommons ξ, n les coordonnées de M par rapport aux axes menés par m. Il résulte des propriétés générales des Réseaux et Assemblages (page 3), qu'il existera dans le Réseau un Sommet de mêmes coordonnées, dans le système d'axes menés par O : soit n ce Sommet. La droite On sera égale et parallèle à mM.

Corollaire. — Si l'on prolonge Mm d'une longueur $m\,u = m$M (*fig.* 3), u sera l'un des Sommets du Réseau : ainsi, le Sommet m est un centre géométrique du Réseau, et il en est de même pour tous les autres Sommets.

PROBLÈME III. — *Trouver l'équation générale des Rangées parallèles à la Rangée* OP (fig. 2).

Par un Sommet à coordonnées numériques m', n' menons une parallèle à OP ; son équation en coordonnées linéaires sera

$$\frac{\xi - m'a}{ma} = \frac{\eta - n'b}{nb}.$$

Si l'on fait disparaître a du premier membre, et b du second, on aura

$$\frac{x - m'}{m} = \frac{y - n'}{n},$$

ou, en tenant compte des équations (6),

$$g(x - m') + h(y - n') = o.$$

On aurait pu déduire directement cette équation de l'équation (7), en y changeant x et y en $x - m'$ et $y - n'$. Donc

$$gx + hy = gm' + hn',$$

ou

(8) $$gx + hy = C,$$

en désignant le dernier membre par C; C est nécessairement un nombre entier. Cette équation, aussi générale que possible, comprend tout le système des Rangées parallèles à OP.

Notation, définition. — Nous adopterons désormais la notation (gh) pour représenter tout le système des Rangées parallèles à la droite de l'équation (7); les nombres entiers g, h, positifs ou négatifs, seront les *caractéristiques* de ce système de Rangées, relativement aux axes des x et des y.

Problème IV. — *Trouver le paramètre des Rangées de notation* (gh).

Soit δ l'angle AOB (*fig.* 2); soit A le paramètre de la Rangée OP qui va de l'origine au Sommet dont les coordonnées sont $\frac{m}{D}$, $\frac{n}{D}$. On aura, par une formule connue,

$$A^2 = \left(\frac{m}{D}\right)^2 a^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2 b^2 + 2\left(\frac{m}{D}\right)\left(\frac{n}{D}\right) ab \cos\delta,$$

et, si l'on substitue les caractéristiques g, h,

(9) $$A^2 = h^2 a^2 + g^2 b^2 - 2gh\, ab \cos\delta.$$

Problème V. — *Trouver le nombre de Sommets contenus dans le parallélogramme construit sur les paramètres* OA, OP *ou* OB, OP (fig. 2).

Supposons que les coordonnées numériques m et n du point P soient positives. Le nombre des Rangées $Bm\ldots$, $B'rn\ldots$, $B''p\ldots$, parallèles à l'axe des x, et qui traversent le parallélogramme OAPQ, est égal à $n-1$. Le segment intercepté entre OP et AQ, étant égal au paramètre OA, doit contenir un Sommet, lequel sera situé dans l'intérieur du parallélogramme OAPQ, puisqu'il ne peut tomber ni sur OP, ni sur AQ; donc, le nombre des Sommets contenus dans ce parallélogramme sera $n-1$. De même pour le parallélogramme OBPR, le nombre des Sommets intérieurs sera $m-1$.

Si m ou n étaient négatifs, on les rendrait positifs, par un échange convenable des demi-axes positifs avec les négatifs.

Problème VI. — *Trouver l'équation des Rangées limitrophes de* OP.

L'équation générale des Rangées parallèles à OP est

$$gx + hy = gm' + hn';$$

g et h sont des nombres donnés, premiers entre eux; m', n', des nombres arbitrairement choisis.

Or on sait, par la théorie des fractions continues, que l'on pourra toujours déterminer m', n' de manière à satisfaire soit à l'équation

$$gm' + hn' = +1,$$

soit à l'équation

$$gm' + hn' = -1.$$

L'équation (8) devient alors

$$(10) \qquad gx + hy = \pm 1,$$

et représente les deux Rangées $pp'\ldots$, $rr'\ldots$, limitrophes de la Rangée OP. Il est évident que l'on ne peut avoir, dans le Réseau, d'autres Rangées plus rapprochées de l'origine O.

Autre démonstration de la solution. — Soient m, n, p, q (*fig.* 2) les Sommets situés dans l'intérieur du parallélogramme OAPQ. Deux d'entre eux ne peuvent être à même distance de OP; car, si m et p étaient dans ce cas, mp serait parallèle à OP, et sur une Rangée parallèle à OP on aurait un paramètre moindre que OP, ce qui ne peut être.

Donc, si l'on mène les lignes pp', mm', qq', nn', elles formeront le commencement de la série des Rangées parallèles à OP; ainsi, ces lignes doivent être équidistantes.

Le nombre des Sommets contenus entre OP et AQ étant égal à $n-1$ (problème V), celui des bandes comprises entre ces deux droites sera égal à n. Donc OA sera partagé en n segments égaux, et l'on aura

$$(11) \qquad Op' = \frac{OA}{n} = \frac{a}{n}.$$

Si maintenant on prolonge la Rangée pp' en p'' jusqu'à la rencontre du demi-axe des y négatives, on démontrerait de même, au moyen du parallélogramme construit sur OP et OR, que l'on a

$$(12) \qquad Op'' = -\frac{b}{m}.$$

Or l'équation de pp' en coordonnées linéaires est évidemment

$$\frac{\xi}{Op'} + \frac{\eta}{Op''} = 1.$$

Si l'on remplace ξ, n par leurs valeurs tirées des équations (2), Op' et Op'' par leurs valeurs tirées des équations (11) et (12), il viendra

$$nx - my = +1.$$

De l'autre côté de OP, dans le parallélogramme OBPR, il existe une autre Rangée limitrophe, la Rangée rr', formant avec OP une bande de même largeur que la bande comprise entre pp' et OP.

Son équation sera évidemment

$$nx - my = -1;$$

donc les deux Rangées limitrophes sont comprises dans l'équation collective

$$nx - my = \pm 1,$$

et si l'on substitue à m, n, les caractéristiques g, h de la Rangée OP, en remarquant que m et n sont premiers entre eux, puisque OP est un paramètre, celle-ci devient

$$gx + hy = \pm 1.$$

Problème VII. — *Dans un système de Rangées dont la notation symbolique est* (gh), *on demande quel nombre de bandes de ce système est compris entre le Sommet à coordonnées* M, N *et le Sommet à coordonnées* M', N'.

Concevons que la Rangée pp' (*fig.* 2), limitrophe de OP, reçoive l'unité pour numéro d'ordre; que la Rangée suivante mm' reçoive le n° 2, et ainsi de suite; puis, que l'on affecte des numéros d'ordre égaux à -1, -2, -3,..., aux Rangées rr', ss',..., situées du côté opposé.

La Rangée n° 1 aura pour équation

$$gx + hy = 1.$$

Celle de la Rangée n° 2, deux fois plus éloignée de l'origine que la précédente, sera

$$gx + hy = 2.$$

La Rangée dont le numéro d'ordre sera C aura pour équation

$$gx + hy = C.$$

D'où l'on voit que, dans l'équation (8), le dernier membre est précisément le numéro d'ordre de la Rangée que l'on considère.

Soient donc C et C′ les numéros d'ordre des Rangées passant par les Sommets (M, N) et (M′, N′); on aura

$$C = gM + hN,$$

$$C' = gM' + hN',$$

$$(13) \qquad C - C' = g(M - M') + h(N - N').$$

Ainsi le nombre des bandes interceptées entre les deux Sommets donnés aura pour valeur, au signe près,

$$g(M - M') + h(N - N').$$

Corollaire. — Dans le parallélogramme construit sur les paramètres OP, OP′ (*fig.* 2), nommons (m, n), (m', n') les coordonnées des Sommets P, P′. Le nombre des bandes contenues entre deux côtés opposés de ce parallélogramme sera égal, au signe près, à $mn' - nm'$.

Problème VIII. — *Trouver la condition pour que deux Rangées soient conjuguées.*

Soient m, n les coordonnées numériques d'un Sommet P (*fig.* 2); soient m', n' celles d'un autre Sommet p : on suppose m, n premiers entre eux; on suppose aussi m', n' premiers entre eux, et l'on demande la condition pour que OP et Op soient des Rangées conjuguées.

Le Sommet p doit appartenir à l'une ou à l'autre des deux Rangées limitrophes de OP : sans cela, les Rangées parallèles à OP et celles parallèles à Op se couperaient en des points qui ne seraient pas tous des Sommets du Réseau, et les Rangées OP, Op ne seraient pas conjuguées. Donc il faut qu'en posant

$$x = m', \quad y = n'$$

dans l'équation (10), celle-ci soit satisfaite; ce qui donne la condition

$$(14) \qquad gm' + hn' = \pm 1,$$

et si l'on y substitue les valeurs de g, h, tirées des équations (6), en

remarquant que $D = 1$, cette condition se change en

(15) $$nm' - mn' = \pm 1.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, le Sommet (m', n') appartiendra à l'une des Rangées limitrophes de OP, et sa ligne de jonction avec l'origine formera une Rangée conjuguée de la Rangée OP.

Si l'on substitue à m, n les caractéristiques g, h de la Rangée OP, à m', n' les caractéristiques g', h' de la rangée Op, on aura

(16) $$hg' - gh' = \pm 1;$$

ce sera la condition pour que les Rangées désignées par les symboles (gh), $(g'h')$ soient conjuguées et reproduisent les Sommets du Réseau par leurs intersections mutuelles.

Problème IX. — *Trouver la condition pour que trois Sommets* (m, n), (m', n'), (m'', n''), *appartiennent à des Rangées limitrophes.*

Transportons l'origine en (m'', n''); les coordonnées numériques des deux autres Sommets seront $(m - m'', n - n'')$, $(m' - m'', n' - n'')$.

Pour que les Rangées allant de la nouvelle origine à ces deux Sommets soient conjuguées, il faut que l'on ait

$$(n - n'')(m' - m'') - (m - m'')(n' - n'') = \pm 1,$$

c'est-à-dire, après réduction,

$$nm' - n'm + n''m - nm'' + n'm'' - m'n'' = \pm 1.$$

Problème X. — *Changer les axes coordonnés et exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, et réciproquement.*

Soient (m, n), (m', n') les coordonnées numériques des deux Sommets P et P' (*fig.* 3); m et n sont premiers entre eux, et il en est de même de m' et n'.

Soient pris OP, OP' pour nouveaux axes coordonnés, et soient X, Y les coordonnées numériques d'un Sommet M dans ce nouveau système.

Alors, si l'on mène Mm parallèle à OP' jusqu'à la rencontre de OPm, et Mn parallèle à OP jusqu'à la rencontre de OP', on aura

$$Om = Mn = X.OP,$$
$$On = Mm = Y.OP'.$$

Les coordonnées numériques du point m dans l'ancien système d'axes conjugués OA, OB seront mX, nY; celles du point n seront $m'Y$, $n'Y$.

Pour obtenir les coordonnées x, y du point M dans l'ancien système, on remarquera que, dans le passage de m à M, l'abscisse et l'ordonnée numériques éprouvent les mêmes accroissements que dans le passage de O à n, puisque On est égal et parallèle à Mm. Donc

$$(17) \qquad \begin{cases} x = mX + m'Y, \\ y = nX + n'Y. \end{cases}$$

On en déduit, par l'élimination,

$$(18) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{n'}{n'm - m'n}\,x + \dfrac{m'}{m'n - n'm}\,y, \\ Y = \dfrac{n}{nm' - n'm}\,x + \dfrac{m}{mn' - nm'}\,y. \end{cases}$$

Si les Rangées OP, OP' sont conjuguées, ces équations se changent en

$$(19) \qquad \begin{cases} \pm X = n'x - m'y, \\ \pm Y = -nx + my. \end{cases}$$

Faites tourner autour de O et d'un mouvement commun les axes des X et des Y, jusqu'à ce que le demi-axe des X positives et le demi-axe des x positives coïncident : si les demi-axes des Y positives et des y positives se trouvent alors situés du même côté par rapport aux axes coïncidents, le signe supérieur devra être préféré dans les premiers membres des équations (19). On adoptera le signe inférieur dans le cas contraire.

Corollaire. — Supposons que l'axe des y change seul, et soit remplacé par la Rangée OP conjuguée avec l'axe des x, lequel reste invariable; soit m_0 l'abscisse numérique du point P. On aura, dans ce changement d'axes,

$$m = 1, \quad n = 0,$$
$$m' = m_0, \quad n' = 1;$$

on en conclura

$$x = X + m_0 Y,$$
$$y = Y,$$

et, réciproquement,

$$Y = y, \quad X = x - m_0 y.$$

La coordonnée numérique parallèle à l'axe déplacé reste invariable.

Problème XI. — *On demande ce que devient le symbole d'une Rangée donnée (gh), dans un nouveau système d'axes.*

Soient toujours (m, n), (m', n') les coordonnées numériques des extrémités des nouveaux axes.

Si dans l'équation

$$gx + hy = C$$

on substitue les valeurs de x, y, tirées des équations (17), on aura

$$(gm + hn)X + (gm' + hn')Y = C;$$

d'où l'on voit que, si l'on représente par (GH) le nouveau symbole, on passera de (gh) à (GH) au moyen des formules

$$(20) \qquad \begin{cases} G = gm + hn, \\ H = gm' + hn'. \end{cases}$$

Corollaire. — Si, conservant l'axe des x, on se borne à remplacer l'axe des y, et à prendre pour nouvel axe des y positives la Rangée allant de l'origine au Sommet $(-1, -1)$, Rangée qui est le prolongement en sens inverse de la diagonale du parallélogramme construit sur a et b, on aura

$$m = 1, \qquad n = 0,$$
$$m' = -1, \quad n' = -1;$$

ce qui changera le symbole (g, h) en $(g, -g-h)$.

Si l'on nomme alors i la caractéristique de la Rangée (gh) relative à ce nouvel axe, on aura l'équation

$$i = -g - h.$$

Soit c le paramètre du nouvel axe; le segment intercepté sur cet axe entre l'origine et la Rangée

$$gx + hy = 1,$$

devenue, dans le nouveau système,

$$gx + iY = 1,$$

aura évidemment pour valeur $\frac{c}{i}$.

D'où l'on voit que, « lorsque les paramètres a, b, c de trois Rangées conju-
» guées deux à deux sont disposés de manière à figurer trois forces qui se
» font équilibre sur le plan du Réseau, toute Rangée limitrophe à une Rangée
» passant par l'origine déterminera, dans les paramètres de ces Rangées,
» les trois segments $\frac{a}{g}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{c}{i}$, g, h, i étant des nombres entiers positifs ou
» négatifs, assujettis à la relation

$$g + h + i = 0, \tag{21}$$

» et alors on pourra prendre indistinctement pour symbole de la Rangée
» (gh), l'un ou l'autre des symboles (gh), (gi), (ih). »

Notation à trois caractéristiques. — Lorsqu'on rapportera la position des Rangées du Réseau à trois axes coordonnés satisfaisant aux conditions que nous venons d'indiquer, on pourra remplacer le symbole (gh) par la notation à trois caractéristiques (ghi).

La formule (9) prend une forme remarquable dans ce système de caractéristiques.

Soient (*fig.* 5)

$$OA = a, \quad OC = b, \quad OE = c, \quad AOC = \delta;$$

on aura

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\delta.$$

En substituant dans l'équation (9) la valeur de $2ab\cos\delta$ déduite de cette formule, et remarquant que l'on a

$$h^2 + gh = -hi, \quad g^2 + gh = -gi,$$

on trouvera, pour le carré du paramètre de la Rangée (ghi),

$$\Lambda^2 = -hia^2 - gib^2 - ghc^2 = -ghi\left(\frac{a^2}{g} + \frac{b^2}{h} + \frac{c^2}{i}\right). \tag{22}$$

THÉORÈME II. — *Si une Rangée* OP (fig. 3) *est contenue dans l'angle* AOB

formé par deux Rangées conjuguées OA, OB, *toutes les Rangées conjuguées de* OP *seront contenues dans le même espace angulaire* AOB.

Prenons OA pour demi-axe des x positives, OB pour demi-axe des y positives, et soient m, n les coordonnées numériques du Sommet P, positives et plus grandes que zéro.

Supposons maintenant que Op soit une rangée conjuguée de OP, et soient

$$m' = m_0, \quad n' = -n_0,$$

les coordonnées numériques du Sommet p; m_0 et n_0 sont des nombres entiers et positifs. La condition générale prescrite par l'équation (15) deviendra

$$nm_0 + mn_0 = \pm 1.$$

Or il est impossible d'y satisfaire avec des valeurs positives et supérieures à zéro des nombres m, n, m_0, n_0. Ainsi, la Rangée Op ne peut être conjuguée de OP.

Par la même raison, une Rangée telle que Oq (même figure) ne peut être conjuguée avec OP. Donc, etc.

Théorème III. — *Le parallélogramme générateur du Réseau a une aire constante, de quelque manière qu'il soit construit.*

Je désignerai, désormais, par ω la surface du parallélogramme générateur d'un Réseau; soit OAmB (*fig.* 2) un tel parallélogramme.

Les Rangées OP et Op étant conjuguées, construisons sur OP, Op, le parallélogramme OP$p\varpi$, qui sera la maille de notre Réseau, déduit de ce système de Rangées; je dis que l'on a

$$\text{aire } \mathrm{OP}\varpi p = \text{aire } \mathrm{OA}m\mathrm{B} = \omega.$$

En effet, le parallélogramme OPϖp a même base que OAQP; mais la hauteur est différente, et l'on a [équation (11)]

$$\mathrm{OP}\varpi p : \mathrm{OAQP} :: \mathrm{O}p' : \mathrm{OA} :: 1 : n,$$

n étant l'ordonnée numérique du Sommet P.

Mais, d'autre part,

$$\mathrm{OA}m\mathrm{B} : \mathrm{OAQP} :: \mathrm{OB} : \mathrm{OB}^{\text{iv}} :: 1 : n;$$

donc

$$\text{aire OP}\varpi p = \text{aire OA}m\text{B} = \omega.$$

Deuxième démonstration. — Soient (m, n) les coordonnées numériques de P, (m', n') celles de p. On démontre, dans les Traités de Géométrie analytique, que le triangle joignant l'origine aux deux points dont les coordonnées linéaires sont (ξ, η), (ξ', η'), a pour aire, si les axes coordonnés sont rectangulaires, la valeur absolue de l'expression

$$\tfrac{1}{2}(\eta\xi' - \xi\eta'),$$

et, si les axes sont obliques et forment entre eux un angle δ,

$$\tfrac{1}{2}(\eta\xi' - \xi\eta')\sin\delta.$$

Ainsi, en posant

$$\text{angle AOB} = \delta,$$

on aura, au signe près,

$$\text{aire tri. O}p\text{P} = \tfrac{1}{2}\sin\delta\,(nbm'a - man'b) = \tfrac{1}{2}ab\sin\delta\,(nm' - mn');$$

donc, à cause de l'équation (15),

$$\text{aire tri. O}p\text{P} = \tfrac{1}{2}ab\sin\delta.$$

Donc

$$\text{aire OP}\varpi p = ab\sin\delta = \text{aire OA}m\text{B} = \omega.$$

Troisième démonstration. — Nous conviendrons de nommer *densité du Réseau*, le nombre des Sommets contenus dans l'unité de surface, les dimensions de cette unité de surface étant supposées toutes les deux extrêmement grandes comparativement aux paramètres des Rangées que l'on considère.

Ceci posé, soient (*fig.* 3)

$$\text{OP} = a', \quad \text{O}p = b', \quad p\text{OP} = \delta', \quad \text{aire OP}\varpi p = \omega';$$

on aura

$$\omega' = a'b'\sin\delta'.$$

Prenons sur la droite OP prolongée, et à partir de O, une longueur $\varkappa$ très-grande relativement à a', et à partir de O sur Op prolongée, une longueur ι très-grande relativement à b', de manière que le parallélogramme construit sur les deux longueurs $\varkappa$, ι soit égal à l'unité de surface, et

qu'ainsi l'on ait

$$\varkappa \iota \sin \delta' = 1.$$

Le nombre de Sommets contenus dans ce parallélogramme se calculera comme le nombre des boulets de la base d'une pile rectangulaire, par la formule

$$\frac{\varkappa}{a'} \times \frac{\iota}{b'}.$$

On aura donc, ρ étant ce nombre, toujours très-grand,

$$\rho = \frac{\varkappa \iota}{a' b'} = \frac{\varkappa \iota \sin \delta'}{a' b' \sin \delta'} = \frac{1}{\omega'};$$

or le nombre ρ, qui mesure la densité du Réseau, doit rester constant, quel que soit le système d'axes conjugués que l'on ait adopté pour sa détermination. On aura donc

(23) $$\omega' = \omega = ab \sin \delta.$$

THÉORÈME IV. — *L'intervalle moyen des Sommets d'un Réseau est égal à la racine carrée de l'aire de son parallélogramme générateur.*

Poisson (*) a désigné par « intervalle moyen des molécules d'un corps » le côté d'un cube égal à l'unité de volume du corps divisée par le nombre des molécules que contient cette unité de volume. On peut appliquer cette définition au cas du plan, et nommer *intervalle moyen des Sommets d'un Réseau* le côté d'un carré égal à l'unité de surface divisée par le nombre des Sommets qu'elle renferme.

Soit ε cet intervalle moyen : en continuant à désigner par ρ le nombre des Sommets contenus dans l'unité de l'aire, on aura

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\rho};$$

donc, d'après le théorème précédent,

(24) $$\varepsilon^2 = \omega, \quad \varepsilon = \sqrt{\omega},$$

ω étant l'aire constante du parallélogramme générateur du Réseau.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 20e cahier, page 5. — *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome XVIII, page 7.

PROBLÈME XII. — *Trouver la largeur d'une bande, dans le système de Rangées dont la notation symbolique est* (gh).

Soient Δ la largeur inconnue de la bande, A le paramètre des deux Rangées limitrophes qui l'embrassent : l'aire du parallélogramme générateur sera égale à ΔA. On aura donc

$$\Delta A = \omega. \tag{25}$$

Substituant les valeurs de A, ω, tirées des équations (9) et (20), on aura

$$\Delta = \frac{ab \sin\delta}{\sqrt{h^2a^2 + g^2b^2 + 2gh\,ab\cos\delta}},$$

ou, plus simplement,

$$\Delta = \frac{\sin\delta}{\sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + 2\frac{gh}{ab}\cos\delta}}. \tag{26}$$

Définition. — Je désigne par *triangle élémentaire* tout triangle ayant pour sommets trois Sommets du Réseau appartenant à deux Rangées limitrophes.

Un tel triangle est toujours la moitié de l'un des parallélogrammes générateurs du Réseau.

On peut le considérer comme formant la *maille triangulaire* du Réseau.

Je désigne sous le nom de *triangle élémentaire principal*, ou, plus brièvement, sous le nom de *triangle principal*, celui qui a pour base le plus petit paramètre du Réseau, et dont les angles à la base sont aigus, l'un d'eux pouvant exceptionnellement devenir droit.

THÉORÈME V. — *Les triangles élémentaires ont une aire constante, égale à la moitié de l'aire du parallélogramme générateur. Le triangle ayant pour sommet l'origine et pour base la droite qui joint les Sommets* (m, n), (m', n'), *a pour aire le produit de l'aire du triangle élémentaire par la valeur absolue du facteur* $mn' - nm'$.

La première partie du théorème est évidente ; les aires des triangles élémentaires ont pour expression commune $\frac{1}{2}\omega$.

Soient maintenant P, P′ (*fig.* 2) les Sommets à coordonnées numériques (m, n), (m', n') ; on aura, d'après la deuxième démonstration du théo-

rème III,

$$\text{aire tri. } OPP' = \tfrac{1}{2} ab \sin\delta\,(nm' - mn').$$

Or

$$ab \sin\delta = \omega;$$

donc

$$\text{aire tri. } OPP' = \tfrac{1}{2}\,\omega\,(nm' - mn'). \tag{27}$$

Si l'on multiplie m et n par un facteur commun D, le premier membre et le second membre deviennent tous les deux D fois plus considérables, de sorte que l'équation (27) n'est pas troublée ; elle ne l'est pas non plus dans le cas où l'on multiplierait m' et n' par un facteur D'. Donc cette équation a toujours lieu, lors même que m, n ou m', n' ne seraient pas premiers entre eux.

Problème XIII. — *Trouver le triangle principal d'un Réseau.*

Choisissez arbitrairement un Sommet O (*fig.* 4), et cherchez parmi tous les autres Sommets le plus rapproché de O.

Soit A ce Sommet, OA étant le paramètre minimum du Réseau. En O et A, élevez les droites Op, Am, perpendiculaires sur OA, et cherchez dans l'espace indéfini $pOAm$ le Sommet le plus rapproché de la droite OA. Vous le rencontrerez nécessairement en B, sur la Rangée limitrophe de OA. Joignez OB et BA ; OAB sera le triangle principal du Réseau.

Théorème VI. — *Le triangle principal est le seul triangle élémentaire dont les trois angles soient aigus.*

En effet, soit OAB (*fig.* 5) le triangle principal. Menons la droite COF parallèle à BA ; les trois Rangées AOD, BOE, COF sont conjuguées deux à deux. Donc tout triangle élémentaire ayant son sommet en O sera contenu dans l'un des six espaces angulaires AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA (théorème II). Soit $O\alpha\beta$ un tel triangle ; la Rangée $O\gamma$ menée par O parallèlement à $\alpha\beta$, étant conjuguée de $O\alpha$ et de $O\beta$, devra être contenue dans le même espace angulaire AOB (théorème II). Si le triangle $O\alpha\beta$ avait ses trois angles aigus, l'espace angulaire embrassé par les trois demi-droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ devrait égaler ou surpasser 90 degrés. Or cela n'est pas possible dans le cas actuel, puisque nous venons de démontrer que l'angle $\alpha O\gamma$ est nécessairement moindre que l'angle aigu ou droit AOB.

Donc, pour obtenir un triangle acutangle, il faut faire coïncider $O\alpha$ avec OA, $O\beta$ avec OB, et l'on retrouve ainsi le triangle principal.

Scolie. — Les six triangles qui composent l'hexagone ABCDEF sont tous égaux et superposables; ils ne forment donc qu'une seule solution. On remarquera que ces triangles sont de deux sortes : les uns, savoir, OAB, DOC, EFO, tournent leur paramètre minimum vers le bas, et peuvent être amenés à coïncidence par une simple translation, sans rotation; les trois autres sont placés dans une situation inverse, et l'on ne peut les faire coïncider avec les précédents que par une rotation de 180 degrés autour d'une normale au plan.

Par exemple, DOC viendra coïncider avec DOE par une demi-rotation, effectuée dans son plan, autour du milieu O' de la base OD, commune aux deux triangles. Une demi-rotation autour de O amènerait DOC en coïncidence avec AOF.

Corollaire. — Le triangle principal n'ayant aucun de ses angles supérieurs à 90 degrés, on en conclura :

1°. Que son angle minimum est compris entre zéro et 60 degrés inclusivement;

2°. Que son angle moyen est compris entre 45 et 90 degrés inclusivement;

3°. Que son angle maximum est compris entre 60 et 90 degrés inclusivement.

Théorème VII. — *Le triangle principal appartient à la bande de largeur maximum.*

En effet, de l'équation (25) on conclut

$$\Delta = \frac{\omega}{A}.$$

Or ω est constant pour tout le Réseau; donc Δ atteint son maximum, lorsque le paramètre atteint sa valeur minimum. Donc, si l'on prend le paramètre minimum pour base du triangle principal, et si on lui mène une parallèle par le sommet géométrique de ce triangle, la bande enfermée entre ces parallèles, et contenant le triangle principal, sera la bande de largeur maximum de tout le Réseau.

Scolie. — Cette valeur maximum de Δ ne peut être inférieure à $a\sqrt{\frac{3}{4}}$,

si l'on désigne par a le paramètre minimum du Réseau. En effet, dans la *fig.* 4, décrivez de O, comme centre, le quart de cercle ANP; de A, comme centre, le quart de cercle ONM. Le sommet B du triangle principal sera compris dans l'espace indéfini pPNMm. La hauteur Δ de ce triangle sera la plus petite possible, lorsque B coïncidera avec N. Donc, nommant Δ_0 la largeur maximun des bandes du Réseau, on aura

$$\Delta_0 > \text{ ou } = a\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

THÉORÈME VIII. — *Le triangle principal contient les trois plus petits paramètres de tout le Réseau.*

Soient OA (*fig.* 5) le paramètre minimum, et OB le plus petit des deux autres côtés du triangle principal; soient OAB, OBC les deux triangles principaux construits sur OB. La ligne Oi, normale à OA, passera entre les Sommets B et C. Pour un Sommet quelconque α appartenant à la Rangée BC prolongée, on aura évidemment

$$i\alpha > i\text{B}, \quad i\alpha > i\text{C};$$

donc

$$\text{O}\alpha > \text{OB}, \quad \text{O}\alpha > \text{OC, c'est-à-dire AB}.$$

Si le point α appartenait à la Rangée limitrophe de BC, à celle qui coupe la normale Oii' à la distance Oi' = 2Oi, on aurait

$$\text{O}\alpha > \text{O}i';$$

or on a d'ailleurs

$$\text{O}i' = 2\,\text{O}i = 2\,\text{AB} \times \sin \text{OAB}.$$

Mais, de plus, en vertu du corollaire du théorème VI, OAB étant l'angle moyen,

$$\text{OAB} > \text{ ou } = 45°, \qquad 2\sin \text{OAB} > \text{ ou } = \sqrt{2};$$

donc

$$\text{O}\alpha > \text{AB}\sqrt{2}.$$

Ainsi, dans tous les cas, le paramètre Oα surpassera le paramètre AB, lequel est, par hypothèse, le plus grand côté du triangle principal.

Scolie. — Il est bien entendu que l'on peut avoir exceptionnellement

$$\text{OB} = \text{OA}, \quad \text{et même} \quad \text{OC} = \text{OB} = \text{OA}.$$

On peut aussi avoir exceptionnellement $O\alpha = OC$, mais seulement dans le cas où le triangle BOA serait rectangle en O.

Corollaire. — Le triangle principal est le triangle de périmètre minimum parmi tous les triangles élémentaires du Réseau.

Théorème IX. — *Un point quelconque étant pris dans l'intérieur d'un triangle principal, l'un des trois sommets de ce triangle sera toujours plus rapproché de ce point que tout autre Sommet du Réseau.*

On démontrerait ce théorème en décrivant sur OA, OB, BA (*fig.* 5), comme diamètres, des demi-circonférences extérieures au triangle BOA, et remarquant que ces trois demi-cercles ne peuvent contenir aucun Sommet.

§ III. — Des Réseaux symétriques.

Définitions. — Toute droite qui partage un Réseau en deux moitiés symétriques, c'est-à-dire susceptibles d'être amenées à coïncidence, Sommet sur Sommet, par une demi-rotation de l'une de ces moitiés autour de la droite, sera dite *axe de symétrie du Réseau*. Les Sommets, ainsi amenés à coïncidence, seront dits *homologues* par rapport à l'axe de symétrie. Nous verrons bientôt que ces axes peuvent toujours être considérés comme étant des Rangées. Le Réseau qui possède un ou plusieurs axes de symétrie sera dit *Réseau symétrique;* il sera dit *asymétrique,* dans le cas contraire.

Lorsque le Réseau possède plusieurs axes de symétrie, ces axes peuvent être *de même espèce* ou *d'espèces différentes*.

Deux axes de symétrie sont dits de même espèce, lorsque la configuration du Réseau est la même autour de chacun d'eux, ce qui exige, comme première condition, qu'ils aient le même paramètre. Alors, si on lie par la pensée les Sommets du Réseau à chacun de ces axes, par exemple, au moyen de normales abaissées sur ces axes, de manière à figurer deux Réseaux égaux, superposés Sommet sur Sommet, et si l'un de ces systèmes est supposé mobile, il faudra, pour que les axes soient de même espèce, que l'on puisse, par des mouvements convenables du Réseau mobile, faire coïncider en même temps l'axe mobile avec l'axe fixe, les Sommets mobiles avec les Sommets fixes.

Deux axes de symétrie sont d'espèces différentes lorsque la configuration du Réseau n'est pas la même autour de chacun d'eux.

THÉORÈME X. — *A tout axe de symétrie ne contenant aucun Sommet du Réseau, correspondent d'autres axes parallèles et passant par des Sommets; le triangle principal est alors rectangle.*

Soit GH un tel axe de symétrie (*fig.* 6); soient A un Sommet, et A′ le Sommet homologue de A, sur une ligne normale à GH. Joignons A, A′, et choisissons sur la Rangée AA′ les deux Sommets les plus rapprochés de l'axe GH, l'un d'un côté et l'autre de l'autre. Supposons que les Sommets A, A′ satisfassent à cette condition, et menons AB, A′B′ parallèles à GH.

Soit maintenant BB′ la Rangée limitrophe de la Rangée AA′ : son paramètre sera nécessairement égal à AA′; ses points d'intersection avec les droites AB, A′B′ seront des Sommets du Réseau; car, si un Sommet tombait entre B et B′, il serait à une distance de son homologue moindre que le paramètre AA′, ce qui ne saurait être. Donc AB, A′B′ seront des Rangées de paramètre AB = A′B′, et conjuguées avec AA′, BB′. Ces Rangées sont évidemment des axes de symétrie. Le triangle principal est alors A′AB, ou A′B′B; il est rectangle.

Corollaire. — On peut remplacer l'axe GH par les axes de symétrie AB, A′B′ qui lui sont parallèles, ou par une Rangée quelconque parallèle à AB qui, elle aussi, sera évidemment un axe de symétrie.

On dit alors que le Réseau *possède un axe de symétrie parallèle* à AB. On doit entendre par là que toutes les Rangées parallèles à AB sont de tels axes.

Après avoir trouvé un système d'axes de symétrie parallèles, et passant par des Sommets, on pourra se demander s'il n'existerait pas des axes parallèles aux précédents, et ne contenant aucun Sommet. Je désigne ces derniers sous le nom d'*axes intermédiaires :* mais, comme, lorsque de tels axes se rencontrent, ils n'introduisent aucune notion nouvelle dans l'étude des Réseaux, je m'abstiendrai de les considérer, et je supposerai désormais que tout axe de symétrie passe par un Sommet.

THÉORÈME XI. — *Tout axe de symétrie passant par un Sommet est une des Rangées du Réseau.*

Soit GOH (*fig.* 7) l'axe passant par le Sommet O, et soit A un autre Sommet en dehors de l'axe; le point A a son homologue en A′, en vertu de la

symétrie dont jouit l'axe GOH : mais, d'autre part, en vertu de la symétrie générale de tout Réseau, A' a un Sommet correspondant en A'' de l'autre côté de O par rapport à A'. Donc la droite AA'' est une Rangée ; mais elle est parallèle à GOH : donc GOH est aussi une Rangée du Réseau.

THÉORÈME XII. — *A tout axe de symétrie correspond un second axe de symétrie qui lui est perpendiculaire, et le coupe sur un Sommet.*

Si l'on mène (*fig.* 7) la droite IOK, passant par le Sommet O et normale à GOH, elle sera perpendiculaire sur le milieu de AA'' : donc, à tout Sommet A correspond un autre Sommet A'', qui est son homologue par rapport à IOK ; donc IOK est aussi un axe de symétrie du Réseau.

THÉORÈME XIII. — *A tout axe de symétrie correspondent une infinité d'autres axes de symétrie qui lui sont parallèles et passent par tous les Sommets du Réseau.*

C'est un résultat des lois générales de la distribution régulière des Sommets dans un Réseau quelconque.

La symétrie du Réseau, suivant une direction déterminée, n'est jamais caractérisée par un axe unique, mais bien par un système d'axes parallèles, formant un système complet de Rangées parallèles entre elles, embrassant tous les Sommets du Réseau.

THÉORÈME XIV. — *Tout Réseau pourvu d'un axe de symétrie a pour triangle principal un triangle rectangle ou un triangle isocèle.*

En effet, soit OM*m* (*fig.* 8) l'axe de symétrie passant par deux Sommets voisins O, M ; soit O'M' la droite sur laquelle est située la Rangée limitrophe de OM. Le segment O'M', intercepté entre les perpendiculaires OO', MM', doit contenir un des Sommets du Réseau.

Soit donc N ce Sommet ayant son homologue en N'. Si l'on fait

$$M'N'' = O'N = O''N',$$

la droite MN'' sera égale et parallèle à ON' : ainsi N'' sera l'un des Sommets du Réseau (théorème I). Or il ne peut exister deux Sommets distincts N, N'' entre O' et M'. Il faut donc que l'une des deux choses suivantes ait lieu : 1° ou que l'on ait NN'' = O'M', auquel cas N tombe en O' et N'' en M' ;

2° ou que l'on ait $NN'' = 0$. Dans le premier cas, le triangle principal sera O'OM ou OMM', c'est-à-dire rectangle. Dans le second cas, N coïncide avec le milieu P de O'M'; le triangle OPM est isocèle, et, de plus, si POM > 45 degrés, il est le triangle principal du Réseau : mais si l'on a POM < 45 degrés, P' étant le Sommet homologue du Sommet P, le triangle POP' sera le triangle principal (théorème VI); il sera pareillement isocèle.

Corollaire I. — Tout Réseau dont le triangle principal est scalène est asymétrique.

Corollaire II. — Tout Réseau symétrique a pour parallélogramme générateur un rectangle ou un rhombe : le rectangle OO'M'M (*fig.* 8), si le triangle principal est OO'M; le rhombe OPMP', si le triangle principal est OPP' ou OPM.

Théorème XV. — *Réciproquement, si le triangle principal est rectangle, le Réseau possède deux axes de symétrie parallèles aux petits côtés du triangle; si le triangle principal est isocèle, le Réseau possède deux axes de symétrie, l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à la base.*

Le Réseau à maille rectangulaire a pour axes les côtés du rectangle; il existe, dans ce cas, des axes de symétrie intermédiaires, parallèles aux précédents, et passant par les centres des rectangles générateurs. Le Réseau à maille rhombe a pour axes les diagonales du rhombe.

Définition. — *Centrer un Réseau, centrer les mailles d'un Réseau,* c'est ajouter de nouveaux Sommets au centre de chacun des parallélogrammes générateurs du Réseau.

Théorème XVI. — *Si l'on centre tous les rectangles d'un Réseau à maille rectangulaire, on forme un Réseau à maille rhombe; si l'on centre tous les rhombes d'un Réseau à maille rhombe, le Réseau devient rectangulaire.*

Cette proposition est évidente; il importe de remarquer que ces changements n'altèrent pas les axes de symétrie du système.

Théorème XVII. — *Les mêmes systèmes de Rangées se rencontrent dans le Réseau à rhombes centrés et dans le Réseau à rhombes non centrés;*

il en est de même pour les Réseaux à mailles rectangulaires centrées ou non centrées.

Soit $abc\ldots$, ABC... (*fig.* 9) un Réseau rhombique à maille $AaBa'$, et considérons le système des Rangées parallèles à l'une des diagonales du rhombe, par exemple à AB. Si l'on prend cette diagonale pour axe des x, une quelconque des Rangées parallèles à cet axe sera caractérisée par l'équation numérique

$$y = n,$$

où n est un nombre entier quelconque.

Le Réseau rhombique se change dans le Réseau rectangulaire à maille $ABA'B'$, si l'on supprime toutes les Rangées représentées par l'équation

$$y = 2j + 1,$$

j étant un nombre entier quelconque. Cette suppression fait disparaître tous les Sommets à ordonnée numérique impaire.

La Rangée qui réunit deux Sommets à ordonnées paires $2j$ et $2j'$ existe évidemment, et dans le Réseau primitif et dans le Réseau dédoublé. Si l'on joint un Sommet à ordonnée paire $2j$ avec un Sommet à ordonnée $2j' + 1$, la Rangée ainsi obtenue, prolongée au delà de ce dernier Sommet d'une quantité égale à l'intervalle des deux Sommets donnés, aboutira à un troisième Sommet ayant une ordonnée égale à $4j' + 2 - 2j$, paire par conséquent; cette Rangée appartiendra donc au Réseau dédoublé, mais son paramètre y sera deux fois plus grand que dans le Réseau primitif.

Enfin, si l'on réunit deux Sommets d'ordonnées impaires $2j + 1$ et $2j' + 1$, la Rangée ainsi obtenue n'existe pas, il est vrai, dans le Réseau dédoublé; mais, si on lui mène une parallèle par le Sommet servant d'origine, l'extrémité du paramètre aboutira à un Sommet ayant pour ordonnée $\pm(2j' - 2j)$, et qui fait partie des Rangées du Réseau dédoublé.

Donc le dédoublement du Réseau n'a fait disparaître aucun système de Rangées.

On prouverait de même que si, dans le Réseau à maille rectangulaire $a'Ab'A'$ (*fig.* 10), on supprime, dans le système des Rangées parallèles aux diagonales $a'b'$, AB, toutes les Rangées d'ordre impair, telles que abc,

$a'b'c'd', \ldots$, le Réseau à maille rhombe ABA'B', provenant de cette soustraction, offrira les mêmes systèmes de Rangées que le Réseau primitif, sauf des altérations nécessaires dans les paramètres de ces Rangées, ou dans les intervalles qui les séparent.

Théorème XVIII. — *Si le triangle principal d'un Réseau est à la fois rectangle et isocèle, le Réseau aura quatre systèmes d'axes : deux systèmes, rectangulaires entre eux et de même espèce, auront pour paramètres les côtés du carré générateur; deux autres systèmes d'une autre espèce que les précédents seront pareillement rectangulaires entre eux; ils auront pour paramètres les diagonales du carré générateur et couperont les axes précédents sous des angles de 45 degrés.*

C'est une conséquence évidente du théorème XV.

Théorème XIX. — *Si le triangle principal est équilatéral, le Réseau possédera six systèmes d'axes : trois systèmes d'une première espèce seront dirigés suivant les côtés du triangle principal; trois autres systèmes pareils entre eux, mais d'une autre espèce que les précédents, seront perpendiculaires aux côtés du triangle principal.*

C'est encore une conséquence du théorème XV. La *fig.* 11 représente la disposition des axes; les lignes pleines correspondent aux axes de la première espèce; les lignes pointillées aux axes de la deuxième espèce.

Classification des Réseaux symétriques.

Au point de vue de leur symétrie, on peut distinguer quatre classes distinctes de Réseaux :

Première classe. — Réseaux à six axes de symétrie, trois d'une espèce et trois d'une autre espèce. Cette classe n'offre qu'un seul mode; le Réseau à maille triéquiangle ayant pour parallélogramme générateur un rhombe à angles de 60 et 120 degrés (*voyez* théorème XIX).

Deuxième classe. — Réseaux à quatre axes de symétrie, deux d'une espèce et deux d'une autre espèce. Cette classe n'offre qu'un seul mode; le Réseau à maille carrée (*voyez* théorème XVIII).

Troisième classe. — Réseaux à deux axes de symétrie. Cette classe offre deux modes distincts : le Réseau à maille rhombe, ou rectangle centrée : le

Réseau à maille rectangulaire, ou rhombe centrée (théorèmes XV et XVI). Les deux axes sont rectangulaires entre eux et d'espèces différentes.

Quatrième classe. — Réseaux asymétriques; la maille est un parallélogramme à côtés inégaux, et dont les angles diffèrent de 90 degrés.

Des Rangées de même espèce dans les Réseaux symétriques.

Définition. — Nous supposerons, comme à la page 26, que, dans le Réseau donné, existent deux Réseaux égaux, superposés Sommets sur Sommets, de manière à figurer un Réseau unique. L'un des deux Réseaux sera considéré comme invariable de position; mais l'autre pourra se mouvoir tout d'une pièce, soit par translation, soit par rotation.

Ceci posé, si, étant donnée une Rangée du Réseau mobile coïncidant avec la Rangée fixe *abc*... avant tout déplacement, on peut, par des mouvements convenables du Réseau mobile, faire coïncider cette Rangée avec la Rangée fixe ABC..., la coïncidence des deux Réseaux, Sommets à Sommets, ayant lieu simultanément, on dira que les Rangées *abc*... et ABC... sont *de même espèce.*

Théorème XX. — *Deux Rangées parallèles peuvent toujours être considérées comme étant de même espèce.*

Car, en donnant au Réseau mobile un mouvement convenable de translation, sans rotation, on pourra toujours amener la coïncidence désirée.

Théorème XXI. — *Deux Rangées sont de même espèce, si elles ont le même paramètre, et si sur ces paramètres, comme bases, on peut construire deux triangles élémentaires égaux entre eux.*

On peut toujours, par simple translation, faire coïncider un Sommet de la Rangée mobile avec un Sommet de la Rangée fixe. Soit donc O (*fig.* 12) le Sommet commun; soit OA la Rangée mobile sur le paramètre OA de laquelle on a contruit le triangle élémentaire OAa; soit OA′ la Rangée fixe sur le paramètre OA′ de laquelle on a construit le triangle élémentaire $OA'a'$. On a, par hypothèse, $OA = OA'$. Il est permis de supposer que l'on a $Oa = Oa'$; car, si l'on avait $Oa' = aA$, l'un des triangles élémentaires pourrait être construit du côté opposé du paramètre qui lui sert de base, et la relation $Oa = Oa'$ serait alors satisfaite.

Si maintenant nous faisons tourner le Réseau mobile, d'une quantité angulaire égale à AOA′, autour d'un axe de rotation passant par O et normal au plan du Réseau, les deux triangles élémentaires coïncideront, et la superposition des deux Réseaux sera complète.

Dans le cas où les deux triangles élémentaires seraient inversement disposés, comme le sont OaA et $Oa'''A'''$, on ne pourrait obtenir la coïncidence par rotation autour de la normale au plan; mais, alors, on y parviendra en faisant tourner le Réseau mobile de 180 degrés autour de la droite OO′, bissectrice de l'angle AOA‴. Donc, dans ce cas encore, les deux Rangées seront de même espèce.

Scolie. — La bissectrice de l'angle formé par deux Rangées à triangles élémentaires égaux, mais inversement disposés, est un axe de symétrie du Réseau.

Définition. — Les Rangées OA, OA′ (*fig.* 12), dont les triangles élémentaires peuvent être amenés à coïncidence par rotation autour de la normale passant par O, seront dites *directement semblables*. Les Rangées OA, OA‴, dont les triangles élémentaires sont inversement disposés, seront dites *inversement semblables*.

Lorsque les deux triangles élémentaires, construits sur les paramètres comme bases, sont isocèles, les Rangées sont en même temps directement semblables et inversement semblables.

THÉORÈME XXII. — *Deux Rangées homologues par rapport à l'un des axes de symétrie du Réseau sont de même espèce et inversement semblables.*

La similitude inverse est alors un résultat de la symétrie.

THÉORÈME XXIII. — *S'il existe deux ou plusieurs Rangées de même espèce, et directement semblables, partant d'un même Sommet, le système complet de ces Rangées divise en parties égales l'espace environnant ce Sommet.*

Parmi les Rangées directement semblables à OA (*fig.* 12), il est permis de considérer celle qui fait avec OA l'angle minimum. Soit OA′ cette Rangée. Faisons tourner le Réseau mobile autour de la normale passant par O, jusqu'à ce que la Rangée mobile OA vienne coïncider avec la Rangée fixe OA′. Dans ce mouvement, la Rangée mobile OA′ arrivera en OA″, qui

devra être l'une des Rangées du Réseau fixe, et l'on trouvera ainsi

$$A'OA'' = AOA'.$$

Une rotation angulaire de même amplitude que la précédente, et dans le même sens, amènera la Rangée mobile OA en OA''; en continuant de la sorte, OA finira par coïncider avec $O\alpha$, prolongement de OA, après une rotation totale de 180 degrés. Toutes les Rangées OA, OA', OA'',..., ainsi obtenues, seront directement semblables, et si l'on désigne par q le nombre total de ces Rangées, on aura

$$AOA' = \frac{180^\circ}{q}.$$

THÉORÈME XXIV. — *Le nombre total des Rangées de même espèce et directement semblables dans un Réseau ne peut être supérieur à trois.*

Soit q le nombre total des Rangées directement semblables; soit O (*fig.* 13) leur Sommet commun, et soit OM le paramètre minimum du Réseau. Faites tourner OM autour de O d'un angle égal à $\frac{180^\circ}{q}$: on sait (théorème précédent) que, dans ce mouvement, le Réseau mobile revient coïncider avec le Réseau fixe.

Soit donc $MOM' = \frac{180^\circ}{q}$; M' sera l'un des Sommets du Réseau. Décrivez un cercle de centre O et de rayon OM, et faites arc M''M' = arc M'M, arc M'''M'' = arc M''M', etc. : les points M, M', M'' appartiendront tous au Réseau, et les cordes MM', M'M'' seront les côtés d'un polygone régulier inscrit, à nombre de côtés égal à $2q$.

Ce polygone ne peut être qu'un carré ou un hexagone. En effet, achevons le losange $MM'M''m$: on aura évidemment angle $M'Mm$ = angle M'OM; ainsi les triangles M'OM, $M'Mm$ seront isocèles et semblables, et l'on aura

$$M'm = \frac{\overline{M'M}^2}{OM}.$$

Donc, si $M'M < OM$, on aura, *à fortiori*, $M'm < OM$; m étant un Sommet du Réseau, OM ne serait plus le paramètre minimum. Or, pour tout polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés supérieur à six, le côté est infé-

rieur au rayon. Donc le polygone MM′M″... sera un carré ou un hexagone, et le nombre q sera égal à 2 ou à 3. Si $q = 2$, le Réseau sera à maille carrée; si $q = 3$, le Réseau sera à maille triéquiangle.

Corollaire. — L'angle formé par deux Rangées directement semblables ne peut être égal qu'à 60 ou à 90 degrés.

Théorème XXV. — *Il ne peut y avoir de Rangées de même espèce, et directement semblables, que dans les Réseaux à maille carrée ou triéquiangle.*

Ce théorème est une conséquence du corollaire précédent. Les deux suivants, qui n'exigent aucune démonstration, en sont les réciproques.

Théorème XXVI. — *Dans tout Réseau à maille carrée, tournant dans son plan autour d'un de ses Sommets, le lieu des Sommets redevient le même à chaque quart de tour, et à tout système de Rangées correspond un autre système de Rangées de même espèce et directement semblables, qui lui est perpendiculaire.*

Théorème XXVII. — *Dans tout Réseau à maille triéquiangle, tournant autour d'un de ses Sommets, le lieu des Sommets redevient le même à chaque sixième de tour, et à tout système de Rangées correspondent deux autres systèmes de Rangées de même espèce et directement semblables, inclinés de 60 degrés sur le système donné.*

Définitions. — Lorsqu'un Réseau, tournant autour d'une droite normale à son plan, recouvre les positions de ses Sommets à chaque quart de tour, cette droite sera dite un *axe de symétrie quaternaire du Réseau*. Lorsque le lieu des Sommets redevient le même à chaque sixième de tour, l'axe de rotation est un *axe de symétrie sénaire*. Ces axes, lorsqu'ils existent, constituent un système de droites parallèles passant par chaque Sommet.

La symétrie quaternaire caractérise le Réseau à maille carrée; la symétrie sénaire, le Réseau à maille triéquiangle.

Les *fig.* 14, 15 et 16 représentent le mode de disposition des Rangées de même espèce (soit directement, soit inversement semblables), autour d'un même Sommet O, pour ces diverses classes de Réseaux. Les lignes pleines sont les axes de symétrie; les traits de longueur inégale indiquent les axes de différentes espèces; les lignes pointillées sont les Rangées dont l'espèce

est la même que celle d'une Rangée de paramètre donné. La *fig.* 14 se rapporte aux Réseaux de la première classe, à maille triéquiangle; la *fig.* 15, aux Réseaux de la deuxième classe, ou à maille carrée; la *fig.* 16, aux Réseaux de la troisième classe, à maille rhombe ou rectangulaire.

Théorème XXVIII. — *Il ne peut y avoir de Rangées de même espèce et de directions différentes dans un Réseau asymétrique.*

Cela est évident pour les Rangées inversement semblables (*voyez* le corollaire du théorème XXI). Cela n'est pas moins évident pour des Rangées directement semblables, en vertu du théorème XXV.

Théorème XXIX. — *Deux axes de symétrie de même espèce sont des Rangées de même espèce pour le Réseau.*

Ces axes sont des Rangées du Réseau (théorèmes X et XI), et puisque la coïncidence de deux tels axes entraîne celle du Réseau fixe avec le Réseau mobile, ces Rangées sont de même espèce (définition de la page 32).

Définition. — On peut définir *angles de même espèce* dans un Réseau deux angles égaux compris entre des Rangées de même espèce deux à deux.

§ IV. — Des Assemblages en général.

Nous considérerons l'Assemblage de la *fig.* 1, dont le Sommet O est pris pour origine des coordonnées, et qui est construit au moyen des trois Rangées OAA'A"..., OBB'B"..., ODD'D".... Nous désignerons par a, b, d les paramètres de ces Rangées, savoir,

$$\text{(28)} \qquad \text{OA} = a, \quad \text{OB} = b, \quad \text{OD} = d;$$

ξ, η, ζ seront les coordonnées linéaires des points de l'espace rapportés aux axes obliques OA, OB, OD; m, n, p représenteront des coordonnées numériques de Sommets définis; x, y, z seront des coordonnées numériques mobiles, appartenant à des Sommets indéterminés, de sorte que l'on aura, suivant les cas,

$$\text{(29)} \qquad \frac{\xi}{a} = m, \quad \frac{\eta}{b} = n, \quad \frac{\zeta}{d} = p,$$

$$\text{(30)} \qquad \frac{\xi}{a} = x, \quad \frac{\eta}{b} = y, \quad \frac{\zeta}{d} = z.$$

On remarquera que l'Assemblage entier peut être considéré comme une surface à nappes distinctes et fermées, venant s'évanouir chacune en un des Sommets de l'Assemblage.

L'équation de cette surface peut s'écrire sous la forme

$$\sin^2 \frac{\xi}{a} \pi + \sin^2 \frac{\eta}{b} \pi + \sin^2 \frac{\zeta}{d} \pi = 0.$$

PROBLÈME XIV. — *Trouver l'équation d'une Rangée passant par l'origine et par un Sommet donné* T (fig. 20).

Soient m, n, p les coordonnées numériques de T; l'équation de OT en coordonnées linéaires et courantes sera

$$\frac{\xi}{ma} = \frac{\eta}{nb} = \frac{\zeta}{pd};$$

en coordonnées numériques, on aura

$$(31) \qquad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}.$$

Si m, n, p avaient un plus grand commun diviseur D, le Sommet $\left(\frac{m}{D}, \frac{n}{D}, \frac{p}{D}\right)$ appartiendrait à la Rangée OT, et serait, parmi tous les Sommets de la Rangée, le plus rapproché du Sommet O. Si m, n, p n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, OT est le paramètre de la Rangée.

Je supposerai, dorénavant, que les Sommets que nous aurons l'occasion de joindre par une droite avec l'origine satisfont à cette condition, que leurs trois coordonnées numériques n'aient d'autre diviseur commun que l'unité.

Notation. — La Rangée allant de l'origine au Sommet (m, n, p), m, n et p n'ayant aucun diviseur commun, sera désignée, dorénavant, par le symbole mnp.

THÉORÈME XXX. — *Soient* T, T′ *deux Sommets d'un Assemblage* (fig. 20); *si, par un troisième Sommet* O, *on mène la droite* O*t égale et parallèle à* TT′, *l'extrémité de cette droite sera un quatrième Sommet de l'Assemblage.*

Ce théorème se démontrerait comme le théorème I.

Problème XV. — *Trouver l'équation générale des Rangées parallèles à la Rangée* OT (fig. 20), *dont le symbole est* mnp.

Soient m', n', p' les coordonnées d'un second Sommet T' pris arbitrairement : la Rangée menée par ce Sommet, parallèlement à OT, aura pour équation, en coordonnées numériques,

$$(32)\qquad \frac{x-m'}{m}=\frac{y-n'}{n}=\frac{z-p'}{p}.$$

Problème XVI. — *Trouver le paramètre de la Rangée* OT *et de ses parallèles* (fig. 20).

Soient α, β, δ les angles que forment entre eux les trois demi-axes des coordonnées positives sur le plan des yz, sur le plan des xz et sur le plan des xy.

Convenons de désigner par $\mathrm{P}mnp$ le paramètre de la Rangée OT allant de l'origine au Sommet (m, n, p) : on aura, par une formule connue, pour la valeur du carré de ce paramètre,

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P}^2 mnp &= m^2a^2+n^2b^2+p^2d^2\\ &\quad+2mnab\cos\delta+2mpad\cos\beta+2npbd\cos\alpha.\end{aligned}\right.$$

On pourrait, dans cette formule, remplacer a par P100, b par P010, d par P001.

Problème XVII. — *Trouver l'équation du plan réticulaire passant par l'origine* O *et par les deux Sommets* T *et* T' (fig. 20).

Les formules de la Géométrie analytique donnent

$$\xi(nbpd'-pdn'b)+\eta(pdm'a-map'd)+\zeta(man'b-nbm'a)=0;$$

et, divisant par abd,

$$(34)\qquad x(np'-pn')+y(pm'-mp')+z(mn'-nm')=0.$$

Soit maintenant D le plus grand commun diviseur des binômes $np'-pn'$, $pm'-mp'$, $mn'-mn'$: posons

$$(35)\qquad \frac{np'-pn'}{\mathrm{D}}=g,\quad \frac{pm'-pm'}{\mathrm{D}}=h,\quad \frac{mn'-nm'}{\mathrm{D}}=k;$$

il viendra

(36) $$gx + hy + kz = 0.$$

Notation, définition. — Nous adopterons la notation symbolique (ghk) pour représenter l'ensemble des plans réticulaires parallèles au plan OTT′ : les nombres entiers g, h, k, positifs ou négatifs, seront les *caractéristiques* de ce système de plans réticulaires par rapport aux axes des x, des y et des z. Dans le cas où ce symbole (ghk) offrirait de l'ambiguïté, on le remplacerait par (g, h, k). Si l'une des trois caractéristiques, k par exemple, prenait le signe —, on le placerait au-dessus de cette caractéristique, ce qui changerait (ghk) en $(gh\bar{k})$.

De ces conventions il résulte que le symbole du plan des xy sera (001), celui du plan des xz (010), celui du plan des yz (100).

Théorème XXXI. — *La trace d'un plan réticulaire quelconque passant par l'origine, tel que* OTT′ (fig. 20), *sur l'un des trois plans coordonnés, est une Rangée commune aux Réseaux de ces deux plans.*

Les équations de cette trace sur le plan des xy sont

$$z = 0, \quad gx + hy = 0.$$

La seconde de ces équations est satisfaite par $x = g$, $y = -h$: donc cette trace est une Rangée. Si g et h ne sont pas premiers entre eux, il existe d'autres Sommets entre l'origine et le point $x = h$, $y = -g$. Soit, en général, D le plus grand commun diviseur de g, h; la trace du plan (ghk) sur le plan des xy sera une Rangée de symbole $\left(\frac{g}{D}\ \frac{h}{D}\right)$.

Corollaire I. — L'intersection de deux plans réticulaires quelconques sera une Rangée commune aux Réseaux des deux plans, pourvu qu'elle contienne un Sommet; car l'on peut toujours prendre l'un des deux plans pour plan des xy (problème I), et le Sommet commun pour origine.

Corollaire II. — Si cette intersection ne passe par aucun des Sommets de l'Assemblage, elle est du moins parallèle à un certain système de Rangées. Pour obtenir ces dernières, on mènera par un Sommet arbitrairement choisi deux plans réticulaires parallèles aux plans donnés; leur intersection fera connaître une des Rangées de ce système.

Problème XVIII. — *Trouver l'équation générale des plans réticulaires parallèles au plan* OTT′ (fig. 20), *et dont le symbole est* (*ghk*).

Par le Sommet (m'', n'', p'') menons un plan parallèle à OTT′; son équation sera

$$gx + hy + kz = gm'' + hn'' + kp'',$$

ou

$$(37) \qquad gx + hy + kz = C,$$

en désignant le dernier membre par C : C est nécessairement un nombre entier. Cette équation, aussi générale que possible, embrasse tout le système des plans réticulaires parallèles à OTT′.

Problème XIX. — *Trouver l'équation des plans réticulaires limitrophes du plan* OTT′ (*fig.* 20).

On sait, par la théorie des fractions continues, que si g, h, k n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, il sera toujours possible de satisfaire à la double équation

$$(38) \qquad gx + hy + kz = \pm 1,$$

par des valeurs entières de x, y, z.

Les deux plans réticulaires fournis par cette équation sont les limitrophes du plan OTT′; car, pour tout autre plan dont l'équation serait

$$gx + hy + kz = C,$$

les intersections avec les axes des x, des y et des z auraient lieu à des distances de l'origine plus considérables que pour les plans de l'équation (38).

On pourrait aussi démontrer ce théorème sans recourir à la théorie des fractions continues.

Problème XX. — *Dans un système de plans réticulaires dont la notation symbolique est* (*ghk*), *on demande quel nombre de strates de ce système est compris entre le Sommet à coordonnées* M, N, P *et le Sommet à coordonnées* M′, N′, P′.

Concevons que le plan réticulaire

$$gx + hy + kz = 1$$

reçoive l'unité pour numéro d'ordre, que le plan suivant reçoive le

n° 2, etc.; le plan

$$gx + hy + kz = C$$

aura le numéro d'ordre C.

Soient maintenant C et C' les numéros d'ordre des plans réticulaires passant par les Sommets (M, N, P) et (M', N', P') : on aura

$$C = gM + hN + kP, \quad C' = gM' + hN' + kP'.$$

Ainsi le nombre des strates interceptées entre les deux Sommets donnés aura pour valeur, au signe près,

$$g(M - M') + h(N - N') + k(P - P').$$

Problème XXI. — *Trouver la condition pour qu'un plan réticulaire de symbole (ghk), passant par l'origine, soit conjugué à une Rangée allant de l'origine au Sommet (m'', n'', p'').*

Il faut évidemment que le Sommet (m'', n'', p'') soit situé sur l'un des deux plans réticulaires limitrophes du plan

$$gx + hy + kz = 0.$$

Ainsi la condition cherchée sera

$$(39) \qquad gm'' + hn'' + kp'' = \pm 1.$$

Si le plan (ghk) contient les Sommets (m, n, p), (m', n', p'), comme cela a été supposé ci-dessus (problème XVII), et si l'on remplace, dans l'équation (39), g, h et k par leurs valeurs tirées des équations (35), la condition cherchée deviendra

$$(40) \quad m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D.$$

Dans cette formule, D est le plus grand commun diviseur des binômes $np' - pn'$, $pm' - pm'$, $mn' - nm'$.

Théorème XXXII. — *Si trois Rangées, partant d'un même Sommet, sont conjuguées dans l'espace, deux d'entre elles seront conjuguées, l'une par rapport à l'autre, sur leur plan de jonction.*

Cette proposition résulte évidemment de la définition des Rangées conjuguées (page 7).

Le parallélipipède construit sur les paramètres de ces trois Rangées est un des parallélipipèdes générateurs de l'Assemblage : les trois faces qui s'assemblent à l'origine forment trois plans conjugués ayant pour plans limitrophes les trois autres faces.

Théorème XXXIII. — *Si l'on remplace le système des trois Rangées conjuguées* OA, OB, OD (fig. 17) *par le système des trois Rangées conjuguées* OA′, OB, OD, *le volume du parallélipipède ne sera pas altéré par ce changement.*

En effet, la droite AA′ sera située dans un plan parallèle au plan BOD : ainsi, les parallélipipèdes générateurs, dans les deux systèmes d'axes, auront la même base OBB′D, et leurs hauteurs seront égales.

Théorème XXXIV. — *Si l'on substitue au système des trois Rangées conjuguées* OA, OB, OD (fig. 17), *le système* OA, OB′, OD′, *les Rangées* OB′ *et* OD′ *étant conjuguées l'une de l'autre sur le plan* BOD, *le volume du parallélipipède générateur restera le même après ce changement.*

Car les bases parallélogrammiques de ces parallélipipèdes ont même surface sur le plan OBD (théorème III) ; les hauteurs sont les mêmes : donc les volumes sont égaux.

Théorème XXXV. — *Le parallélipipède générateur d'un Assemblage a toujours le même volume, quel que soit le système de Rangées conjuguées dont il dérive.*

Soient Ox, Oy, Oz (*fig.* 18) les trois paramètres qui ont servi à construire les Sommets de l'Assemblage ; soit Ω le volume du parallélipipède construit sur ces trois paramètres ; soient OA, OB, OD les trois Rangées conjuguées qui nous sont données, et Ω' le volume du parallélipipède générateur correspondant.

Soit maintenant OA′ la trace du plan AOB sur le plan des xy ; cette trace est l'une des Rangées du Réseau du plan AOB (théorème XXXI). Soit donc OB′ l'une de ses conjuguées, dans le même plan. On pourra, en vertu du théorème XXXIV, remplacer le système de Rangées (OA, OB, OD) par le système (OA′, OB′, OD), sans altérer le volume Ω' du parallélipipède générateur.

Soit, de même, OD′ la Rangée, trace du plan OB′D sur le plan des xy, et soit OB″ une Rangée conjuguée de OD′ dans le plan OB′D. On pourra

substituer au système (OA′, OB′, OD) le système (OA′, OD′, OB″), sans altérer le volume Ω' du parallélipipède générateur.

On peut, enfin, remplacer (OA′, OD′, OB″) par (Ox, Oy, OB″), puisque Ox et Oy sont deux Rangées conjuguées du plan AO′D′, qui coïncide avec le plan des xy. Le volume du parallélipipède générateur restera égal à Ω'.

Si l'on compare ce dernier parallélipipède au parallélipipède construit sur Ox, Oy, Oz, on aura, en vertu du théorème XXXIII,

$$\Omega' = \Omega.$$

Deuxième démonstration. — Nous conviendrons de nommer *densité de l'Assemblage* le nombre des Sommets contenus dans l'unité de volume, les dimensions de cette unité de volume étant supposées, toutes les trois, extrêmement grandes comparativement aux paramètres des Rangées que l'on considère.

Ceci posé, soient (*fig.* 18)

$$OA = a', \quad OB = b', \quad OD = d',$$
$$\text{angle AOB} = \delta', \quad \text{inclinaison de OD sur le plan AOB} = \tau'.$$

On aura, par une formule connue,

$$\Omega' = a' b' d' \sin\delta' \sin\tau'.$$

Prenons, sur les droites OA, OB, OD prolongées, des longueurs $\varkappa$, ι, σ très-grandes relativement à a', b', d', de manière que le parallélipipède construit sur $\varkappa$, ι, σ soit égal à l'unité de volume, et qu'ainsi l'on ait

$$\varkappa\iota\sigma \sin\delta' \sin\tau' = 1.$$

Le nombre des Sommets contenus dans ce parallélipipède se calculera comme le nombre des boulets d'une pile à faces rectangulaires, et sera égal à

$$\frac{\varkappa}{a'} \times \frac{\iota}{b'} \times \frac{\sigma}{d'}.$$

On aura donc, ρ étant ce nombre, toujours très-grand,

$$\rho = \frac{\varkappa\iota\sigma}{a'b'd'} = \frac{\varkappa\iota\sigma \sin\delta' \sin\tau'}{a'b'd' \sin\delta' \sin\tau'} = \frac{1}{\Omega'}.$$

Or le nombre ρ, qui mesure la densité de l'Assemblage, doit rester constant, quel que soit le système d'axes conjugués que l'on ait adopté pour sa détermination.

Si donc l'on pose

$$Ox = a, \quad Oy = b, \quad Oz = d,$$

$$\text{angle } xOy = \delta, \quad \text{inclinaison de } Oz \text{ sur } xOy = \tau,$$

on aura

(41) $$\Omega' = \Omega = abd \sin\delta \sin\tau.$$

Théorème XXXVI. — *Réciproquement, si le parallélipipède construit sur les paramètres des Rangées* OA, OB, OD (fig. 18) *est égal en volume au parallélipipède générateur de l'Assemblage, les trois Rangées seront conjuguées.*

Concevons que dans l'intérieur du parallélipipède il existe un Sommet de l'Assemblage, et nommons P ce Sommet, choisi de manière à être aussi rapproché que possible du plan AOB : le parallélipipède construit sur OP, OA, OB serait égal à Ω (théorème précédent) : donc le parallélipipède construit sur OD, OA, OB, qui a même base sur le plan OAB et une hauteur plus grande aurait un volume plus grand que Ω, ce qui est contraire à l'hypothèse comprise dans l'énoncé du théorème; donc, etc.

Problème XXII. — *Trouver la condition pour que trois Rangées soient conjuguées.*

Soient (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p'') les coordonnées des trois Sommets T, T', T'' (*fig.* 20). On suppose que m, n, p n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité, et qu'il en est de même pour m', n', p', et pour m'', n'', p''. On demande la condition pour que les Rangées OT, OT', OT'', dont les symboles sont mnp, $m'n'p'$, $m''n''p''$, soient des Rangées conjuguées.

Soient (ξ, ν, ζ), (ξ', ν', ζ'), (ξ'', ν'', ζ'') les coordonnées linéaires des points T, T', T'', dans le système d'axes conjugués Ox, Oy, Oz, ayant pour paramètres a, b, d.

On démontre, dans les Traités de Géométrie analytique, que le volume d'un tétraèdre, ayant son sommet à l'origine, et les sommets de sa base triangulaire aux points (ξ, ν, ζ), (ξ', ν', ζ'), (ξ'', ν'', ζ''), a pour valeur,

au signe près,

$$\tfrac{1}{6}(\xi\eta'\zeta''-\xi\zeta'\eta''+\zeta\xi'\eta''-\eta\xi'\zeta''+\eta\zeta'\xi''-\zeta\eta'\xi''),$$

si le système d'axes est rectangulaire.

Mais, si les axes sont obliques, et si l'on a

$$\text{angle } xOy=\delta,\quad \text{inclinaison de } Oz \text{ sur } xOy=\tau,$$

ce volume doit être multiplié par $\sin\delta\sin\tau$.

Donc, si l'on nomme Ω' le volume du parallélipipède construit sur les paramètres OT, OT' et OT'', Ω celui du parallélipipède générateur, on aura, au signe près,

$$\Omega'=(mn'p''-mp'n''+pm'n''-nm'p''+np'm''-pn'm'')\,abd\sin\delta\sin\tau,$$

ou encore, à cause de l'équation (41),

$$(42)\quad \Omega'=(mn'p''-mp'n''+pm'n''-nm'p''+np'm''-p'n'm'')\,\Omega.$$

Si les Rangées sont conjuguées, on doit avoir $\Omega'=\Omega$ (théorème XXXV). Donc la condition cherchée sera

$$(43)\quad mn'p''-mp'n''+pm'n''-nm'p''+np'm''-pn'm''=\pm 1.$$

Réciproquement, si l'équation (43) est satisfaite, on en conclura $\Omega'=\Omega$, et les trois Rangées seront conjuguées (théorème XXXVI).

Problème XXIII. — *Trouver la condition pour que deux Rangées, allant de l'origine aux points* T, T' (fig. 20), *soient conjuguées sur le plan réticulaire qui contient ces deux Rangées.*

Soient (m, n, p), (m', n', p') les coordonnées de T et T'. L'équation du plan OTT' sera donnée par la formule (36), dans laquelle g, h, k ont des valeurs indiquées par les formules (35). L'équation des deux plans réticulaires limitrophes de OTT' sera donnée (problème XIX) par

$$gx+hy+kz=\pm 1.$$

Ainsi cette équation pourra s'écrire

$$x(np'-pn')+y(pm'-mp')+z(mn'-nm')=\pm D.$$

Soient maintenant (m'', n'', p'') les coordonnées d'un Sommet T″ appartenant à l'un de ces plans limitrophes; OT″ sera une Rangée conjuguée avec le plan OTT′, et l'on aura

$$(44)\qquad m''(np'-pn')+n''(pm'-mp')+p''(mn'-nm')=\pm D.$$

Mais, si OT et OT′ sont déjà des Rangées conjuguées l'une à l'autre sur le plan OTT′, OT, OT′ et OT″ seront trois Rangées conjuguées, et l'on aura, en vertu de la condition exprimée par (43),

$$m''(np'-pn')+n''(pm'-mp')+p''(mn'-nm')=\pm 1.$$

De cette équation et de l'équation (44), on conclut $D=1$. Réciproquement, si D est égal à 1, la condition (43) sera satisfaite, et les Rangées OT, OT′ seront conjuguées entre elles sur leur plan de jonction (théorème XXXII).

Donc, si $np'-pn'$, $pm'-mp'$, et $mn'-nm'$ n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, les Rangées OT et OT′ sont des Rangées conjuguées du Réseau du plan OTT′, et la réciproque est également vraie.

Théorème XXXVII. — *Si* (m, n, p), (m', n', p') *sont les coordonnées numériques des Sommets* T, T′ (fig. 20), *le nombre des bandes parallèles à* OT *ou à* OT′, *et contenues entre deux côtés opposés du parallélogramme construit sur* OT, OT′, *sera égal au plus grand commun diviseur des trois binômes* $np'-pn'$, $pm'-mp'$, $mn'-nm'$.

En effet, soient m'', n'', p'' les coordonnées d'un Sommet T″ appartenant à un plan réticulaire limitrophe du plan OTT′. On aura (équation 44)

$$m''(np'-pn')+n''(pm'-mp')+p''(mn'-nm')=\pm D.$$

Soit Ω' le volume du parallélipipède construit sur les trois arêtes OT, OT′, OT″; la valeur de Ω' sera donnée par l'équation (42), qui se changera, dans le cas actuel, en

$$\Omega'=\Omega D.$$

Soient maintenant ω l'aire du parallélogramme générateur du Réseau du plan OTT′, ω' l'aire du parallélogramme construit sur OT et OT′, enfin Δ l'épaisseur de la strate comprise entre T″ et le plan OTT′; on aura

$$\Omega=\Delta\omega,\quad \Omega'=\Delta\omega'.$$

Donc aussi

$$(45)\qquad \omega' = \omega D.$$

Or le rapport $\omega' : \omega$ devra évidemment être égal au nombre de bandes parallèles soit à OT, soit à OT', qui traversent le triangle OTT' : donc D représentera ce nombre de bandes; donc ce nombre sera le plus grand commun diviseur de nos trois binômes.

Théorème XXXVIII. — *Dans un système de plans réticulaires parallèles ayant pour symbole* (ghk) *et dont le parallélogramme générateur a pour surface* ω, *le triangle intercepté par les axes conjugués dans le plan*

$$gx + hy + kz = 1,$$

a pour aire le quotient de l'aire $\frac{1}{2}\omega$ *par le produit* ghk *des caractéristiques, et l'aire du triangle intercepté par ces mêmes axes dans le plan*

$$gx + hy + kz = ghk,$$

a pour valeur le produit de $\frac{1}{2}\omega$ *par* ghk.

Soient GHK (*fig.* 19) le plan

$$gx + hy + kz = 1,$$

et G'H'K' le plan

$$gx + hy + kz = ghk,$$

de sorte qu'on ait, a, b, d étant les trois paramètres de Ox, Oy, Oz,

$$(46)\qquad \begin{cases} OG' = hka, & OG = \dfrac{a}{g}, \\ OH' = gkb, & OH = \dfrac{b}{h}, \\ OK' = ghd, & OK = \dfrac{d}{k}, \end{cases}$$

$$\text{aire } G'H'K' : \text{aire } GHK :: \overline{OG'}^2 : \overline{OG}^2 :: g^2h^2k^2 : 1.$$

Transportons l'origine des coordonnées en G', les axes gardant leurs directions. Les coordonnées numériques (m, n, p), (m', n', p') des Sommets

H′ et K′, pour cette position des axes, seront

$$m = -hk, \quad n = gk, \quad p = 0,$$
$$m' = -hk, \quad n' = 0, \quad p' = gh;$$

on en conclut

$$np' - pn' = g^2 hk,$$
$$pm' - mp' = gh^2 k,$$
$$mn' - nm' = ghk^2,$$

et, D étant le plus grand commun diviseur des trois binômes,

$$D = ghk,$$

attendu que g, h, k sont des nombres premiers entre eux.

Soit donc ω l'aire de la maille génératrice des Réseaux des plans GHK, G′H′K′: on aura, en vertu du théorème XXXVII et de l'équation (45),

(47) $$2 \text{ aire tri. } G'H'K' = \omega D = ghk\omega,$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème. Et, comme on a, d'autre part,

$$\text{aire tri. } GHK = \frac{\text{aire tri. } G'H'K'}{g^2 h^2 k^2},$$

il en résulte

(48) $$2 \text{ aire tri. } GHK = \frac{\omega}{ghk}.$$

Problème XXIV. — *Trouver l'aire du parallélogramme générateur dans le système des plans réticulaires indiqués par le symbole* (ghk).

Je nommerai α, β, δ (*fig.* 19) les angles zOy, zOx et yOx de l'angle trièdre O; μ, ν, ϖ les angles dièdres du même angle solide, μ étant l'angle dièdre dont Ox est l'arête, ν, ϖ étant les angles dièdres dont Oy et Oz sont les arêtes. Je nommerai S (ghk) l'aire inconnue du parallélogramme générateur des Réseaux des plans (ghk). Ceci posé, on aura, par une formule connue que j'emprunte à la Géométrie analytique à trois dimensions,

(49) $$\left\{ \begin{aligned} \overline{GHK}^2 = \overline{GHO}^2 + \overline{GKO}^2 + \overline{HKO}^2 - 2\,GHO.GKO\cos\mu \\ - 2\,GHO.HKO\cos\nu - 2\,GKO.HKO\cos\varpi. \end{aligned} \right.$$

Le plan GHK étant le plan réticulaire qui a pour équation

$$gx + hy + kz = 1,$$

on aura

$$\text{aire tri. GHO} = \tfrac{1}{2}\,\text{OG}\,.\,\text{OH}\sin\delta = \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{g}\,\frac{b}{h}\sin\delta,$$

$$\text{aire tri. GKO} = \tfrac{1}{2}\,\text{OG}\,.\,\text{OK}\sin\beta = \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{g}\,\frac{d}{k}\sin\beta,$$

$$\text{aire tri. HKO} = \tfrac{1}{2}\,\text{OH}\,.\,\text{OK}\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\,\frac{b}{h}\,\frac{d}{k}\sin\alpha.$$

Convenons maintenant de représenter $bd\sin\alpha$ par φ,
$ad\sin\beta$ par χ,
$ab\sin\delta$ par ψ;

φ sera l'aire de la maille du Réseau du plan des yz, soit S(100);
χ sera l'aire analogue pour le plan des xz, soit S(010);
ψ sera l'aire analogue pour le plan des xy, soit S(001).

On aura alors

$$\text{aire tri. GHO} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\psi}{gh},$$

$$\text{aire tri. GKO} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\chi}{gk},$$

$$\text{aire tri. HKO} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\varphi}{hk};$$

mais, d'autre part, en vertu du théorème XXXVIII,

$$\text{aire tri. GHK} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{S}(ghk)}{ghk}.$$

Donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (49), il viendra

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \text{S}^2(ghk) &= g^2\varphi^2 + h^2\chi^2 + k^2\psi^2 \\ &\quad - 2gh\,\varphi\chi\cos\varpi - 2gk\,\varphi\psi\cos\nu - 2hk\,\chi\psi\cos\mu, \end{aligned}\right.$$

et cette équation fera connaître l'aire du parallélogramme générateur du plan réticulaire (ghk), dès que l'on connaîtra les aires analogues pour les Réseaux des trois plans coordonnés conjugués.

Problème XXV. — *Trouver l'épaisseur des strates parallèles aux plans réticulaires dont le symbole est* (ghk).

Soit toujours S(ghk) l'aire du parallélogramme générateur du Réseau du

système (ghk). Soient Δ l'épaisseur des strates correspondantes, et Ω le volume du parallélipipède générateur; on aura

$$(51)\qquad \Omega = \Delta S(ghk).$$

Conservons aux angles α, β, δ, μ, ν, ϖ leurs significations précédentes; nous pourrons mettre l'équation (41) sous la forme

$$(52)\qquad \Omega = abd\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}.$$

Tirons de l'équation (50) la valeur de $S^2(ghk)$ pour la substituer dans l'équation (51) élevée au carré; nous aurons

$$\Delta^2 = \frac{a^2b^2d^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta)}{g^2\varphi^2 + h^2\chi^2 + k^2\psi^2 - 2gh\varphi\chi\cos\varpi - 2gk\varphi\psi\cos\nu - 2hk\chi\psi\cos\mu}.$$

Enfin, si nous remplaçons φ, χ, ψ par leurs valeurs en a, b, d, α, β, δ, cette équation deviendra

$$(53)\qquad \Delta^2 = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}{\frac{g^2\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{h^2\sin^2\beta}{b^2} + \frac{k^2\sin^2\delta}{d^2} - 2\frac{gh\sin\alpha\sin\beta}{ab}\cos\varpi - 2\frac{gk\sin\alpha\sin\delta}{ad}\cos\nu - 2\frac{hk\sin\beta\sin\delta}{bd}\cos\mu}.$$

On aurait pu arriver directement à cette formule, en cherchant l'expression analytique de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan dont l'équation, en coordonnées linéaires, est

$$g\frac{\xi}{a} + h\frac{\eta}{b} + k\frac{\zeta}{d} = 1.$$

THÉORÈME XXXIX. — *L'intervalle moyen des Sommets d'un Assemblage est égal à la racine cubique du volume de son parallélipipède générateur.*

Conformément à la définition donnée par Poisson de l'*intervalle moyen* (*voyez* page 21), nous nommerons *intervalle moyen des Sommets d'un Assemblage* le côté d'un cube égal à l'unité de volume divisée par le nombre des Sommets que renferme cette unité de volume.

Soit E cet intervalle moyen; en nommant toujours ρ le nombre des Sommets, supposé très-considérable, que contient l'unité de volume, on aura

$$E^3 = \frac{1}{\rho};$$

d'où, à cause de $\rho = \frac{1}{\Omega}$ (*voyez* deuxième démonstration du théorème XXXV), on conclura

$$(54) \qquad E^3 = \Omega, \qquad E = \sqrt[3]{\Omega},$$

Ω étant le volume invariable du parallélipipède générateur de l'Assemblage.

Problème XXVI. — *Changer les axes coordonnés et exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, et réciproquement.*

Soient (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p'') les coordonnées numériques des extrémités T, T', T'' (*fig.* 20) des paramètres des trois Rangées qui doivent servir de nouveaux axes. Soient X, Y, Z les coordonnées numériques d'un Sommet quelconque dans le nouveau système d'axes. Par une voie analogue à celle qui conduit aux équations (17), on obtiendra

$$(55) \qquad \begin{cases} x = mX + m'Y + m''Z, \\ y = nX + n'Y + n''Z, \\ z = pX + p'Y + p''Z. \end{cases}$$

La Rangée OT allant de l'origine au point (m, n, p) est censée servir d'axe des X. La Rangée OT' sert d'axe des Y, et la Rangée OT'', d'axe des Z.

Je pose maintenant, pour abréger,

$$(56) \qquad \begin{cases} mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = (mn'p''), \\ mn' - nm' = (mn'), \quad nm'' - mn'' = (nm''), \quad m'n'' - n'm'' = (m'n''), \\ pm' - mp' = (pm'), \quad mp'' - pm'' = (mp''), \quad p'm'' - m'p'' = (p'm''), \\ np' - pn' = (np'), \quad pn'' - np'' = (pn''), \quad n'p'' - p'n'' = (n'p''). \end{cases}$$

Si, par les procédés connus de l'élimination, on tire des équations (55) les valeurs de X, Y, Z, on aura

$$\begin{aligned} X &= \frac{(n'p'')}{(mn'p'')}x + \frac{(p'm'')}{(mn'p'')}y + \frac{(m'n'')}{(mn'p'')}z, \\ Y &= \frac{(pn'')}{(mn'p'')}x + \frac{(mp'')}{(mn'p'')}y + \frac{(nm'')}{(mn'p'')}z, \\ Z &= \frac{(np')}{(mn'p'')}x + \frac{(pm')}{(mn'p'')}y + \frac{(mn')}{(mn'p'')}z; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que, pour que X, Y, Z soient toujours des nombres entiers, il faut que les trois Rangées données soient conjuguées.

En adoptant cette hypothèse, on aura

$$(mn'p'') = \pm 1,$$

ce qui changera les précédentes équations en

$$(57)\qquad \begin{cases} \pm X = (n'p'')x + (p'm'')y + (m'n'')z, \\ \pm Y = (pn'')x + (mp'')y + (nm'')z, \\ \pm Z = (np')x + (pm')y + (mn')z. \end{cases}$$

Par une rotation convenable du système OT, OT', OT'' autour de O, amenez OT sur Ox, amenez OT' dans le plan xOy, en ayant soin que OT' et Oy soient situés d'un même côté par rapport à la droite Ox indéfiniment prolongée dans les deux sens : alors, si OT'' et Oz tombent du même côté par rapport au plan des xy, vous devrez donner le signe $+$ aux premiers membres des équations (57); dans le cas contraire, vous devrez préférer le signe $-$.

Corollaire. — Supposons que l'axe des z change seul et soit remplacé par OT'', et nommons m_0, n_0 les coordonnées numériques de T'' parallèlement aux axes des x et des y.

Dans ce cas, l'on aura

$$\begin{aligned} m &= 1, & n &= 0, & p &= 0, \\ m' &= 0, & n' &= 1, & p' &= 0, \\ m'' &= m_0, & n'' &= n_0, & p'' &= 1, \end{aligned}$$

et les équations (55) donneront

$$\begin{aligned} x &= X + m_0 Z, \\ y &= Y + n_0 Z, \\ z &= Z. \end{aligned}$$

Les formules inverses seront alors

$$\begin{aligned} X &= x - m_0 z, \\ Y &= y - n_0 z, \\ Z &= z. \end{aligned}$$

La coordonnée numérique parallèle à l'axe déplacé reste invariable.

PROBLÈME XXVII. — *On demande ce que devient le symbole d'un plan réticulaire* (ghk) *dans un nouveau système d'axes.*

Soient toujours (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p'') les coordonnées numériques des extrémités T, T', T'' (*fig.* 20) des paramètres des trois Rangées qui doivent servir de nouveaux axes. Si, dans l'équation générale

$$gx + hy + kz = C,$$

on substitue les valeurs de x, y, z, tirées des équations (55), l'on aura

$$(gm + hn + kp)X + (gm' + hn' + kp')Y + (gm'' + hn'' + kp'')Z = C;$$

d'où l'on voit que, dans ce nouveau système d'axes, le symbole des plans (ghk) se change en $(gm + hn + kp,\ gm' + hn' + kp',\ gm'' + hn'' + kp'')$: c'est-à-dire que, si le nouveau symbole est (GHK), l'on aura

$$(58)\qquad \begin{cases} G = gm + hn + kp, \\ H = gm' + hn' + kp', \\ K = gm'' + hn'' + kp''. \end{cases}$$

Corollaire. — Si, conservant les axes des x et des y, on se borne à remplacer l'axe des z, et à prendre pour nouvel axe des z la Rangée $\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$, qui est le prolongement en sens inverse de la diagonale du parallélipipède construit sur a, b, d, on aura

$$\begin{aligned} m &= 1, & n &= 0, & p &= 0, \\ m' &= 0, & n' &= 1, & p' &= 0, \\ m'' &= -1, & n'' &= -1, & p'' &= -1, \end{aligned}$$

ce qui change le symbole (ghk) en $(g, h, -g-h-k)$.

Si l'on nomme alors l la caractéristique du plan réticulaire (ghk) relative à ce nouvel axe, on aura l'équation

$$l = -g - h - k.$$

Si e est le paramètre du nouvel axe, le segment intercepté sur cet axe entre l'origine et le plan

$$gx + hy + kz = 1,$$

devenu, dans le nouveau système,

$$gx + hy + lZ = 1,$$

aura évidemment pour valeur $\frac{e}{l}$.

D'où l'on voit que, « lorsque les paramètres a, b, d, e de quatre Rangées » conjuguées deux à deux sont disposés de manière à figurer quatre forces se » faisant équilibre dans l'espace, tout plan limitrophe à un plan réticulaire » passant par l'origine déterminera, dans les paramètres de ces Rangées, » les segments $\frac{a}{g}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{d}{k}$, $\frac{e}{l}$, g, h, k, l étant des nombres entiers positifs ou » négatifs; alors on pourra prendre indistinctement pour symbole du plan » réticulaire les notations (ghk), (ghl), (glk), (lhk), et il existera, entre les » quatre caractéristiques g, h, k, l, la relation

$$g + h + k + l = 0. \text{ »} \tag{59}$$

Notation à quatre caractéristiques. — Lorsqu'on emploie, pour fixer la position des plans réticulaires de l'Assemblage, quatre axes coordonnés satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer, il convient de remplacer le symbole (ghk) par le symbole à quatre caractéristiques $(ghkl)$.

Définitions. — Je désigne sous le nom de *tétraèdre élémentaire* tout tétraèdre ayant pour sommets quatre Sommets de l'Assemblage, choisis de manière que chacun d'eux soit situé sur un plan limitrophe au plan réticulaire qui contient les trois autres Sommets, ou encore « tout tétraèdre construit » sur trois paramètres conjugués aboutissant au même Sommet. »

Un tel tétraèdre forme toujours la sixième partie de l'un des parallélipipèdes générateurs de l'Assemblage : ainsi, le volume de tous ces tétraèdres est le même et égal à $\frac{1}{6}\Omega$.

Je nomme *tétraèdre principal,* celui dont la base est le triangle acutangle embrassé par les deux paramètres minima de tout l'Assemblage, et dont les trois angles dièdres adjacents à la base sont aigus, deux de ces trois angles pouvant, exceptionnellement, devenir droits.

THÉORÈME XL. — *Tout tétraèdre ayant pour sommets l'origine et les trois points* (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p''), *a pour volume le produit du volume du tétraèdre élémentaire par le facteur*

$$mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm''.$$

Ce théorème est une conséquence de la formule (42).

Soit OTT'T'' (*fig.* 20) le tétraèdre donné; on aura

$$(60) \qquad \text{volume tétra. OTT'T''} = \tfrac{1}{6}\,\Omega\,(mn'p'').$$

Cette formule reste exacte, lorsque m, n, p, ou m', n', p', ou m'', n'', p'', ont des diviseurs communs autres que l'unité.

PROBLÈME XXVIII. — *Trouver le tétraèdre principal d'un Assemblage.*

Choisissons arbitrairement un Sommet O (*fig.* 21), et cherchons les deux paramètres minima OA, OB; traçons-les dans un sens tel, que l'angle AOB soit aigu, ou tout au plus égal à 90 degrés, ce qui sera toujours possible. Achevons le triangle AOB, qui sera l'un des triangles principaux du plan réticulaire AOB, et sur l'un quelconque de ses trois côtés, par exemple sur AB, construisons le second triangle principal BAO' qui, réuni au précédent, complète le parallélogramme générateur OAO'B. Sur le contour de ce parallélogramme, élevons à angle droit les faces d'un prisme indéfini dans les deux sens. Le plan réticulaire, limitrophe du plan OAO'B, et situé au-dessus de ce dernier plan, sera coupé par le contour du prisme suivant un parallélogramme égal à la base OAO'B, et qui devra contenir dans son intérieur un Sommet de l'Assemblage, à moins qu'il n'en contienne deux, ou quatre, sur son contour. Soit D ce Sommet; les Rangées OA, OB, OD seront conjuguées, et la pyramide OABD sera le tétraèdre principal.

Si le Sommet ainsi obtenu était situé en d, et se projetait orthogonalement dans l'intérieur du deuxième triangle BAO', les Rangées O'A, O'B, O'd seraient conjuguées, et la pyramide O'ABd serait le tétraèdre principal.

Scolie. — Soit OABD le tétraèdre principal résultant de la construction précédente, et nécessairement situé au-dessus du plan OAO'B. Si nous répétons la même construction sur le plan limitrophe du plan OAO'B, et qui est situé au-dessous de ce dernier plan, nous obtiendrons un autre

sommet D′, dont la situation par rapport à D sera telle, que A, D, B, D′ formeront un parallélogramme. Le tétraèdre O′ABD′ sera aussi un tétraèdre principal, mais placé au-dessous du plan OAO′B. Il est facile de voir que OABD, O′ABD′ sont deux polyèdres *inverses* (*), dont le *pôle de symétrie* sera en ω, au centre du parallélogramme OAO′B : d'où l'on voit que, « dans tout Assemblage, il existe deux tétraèdres principaux inverses l'un » de l'autre. »

THÉORÈME XLI. — *Tous les angles plans du tétraèdre principal sont aigus; quelques-uns d'entre eux (quatre au plus) peuvent être droits, exceptionnellement.*

Soient OA, OB (*fig.* 21) les deux paramètres minima de l'Assemblage, et OABD son tétraèdre principal.

La proposition énoncée est évidente pour les trois angles de la base OAB. Menez en O un plan normal à OA : par la construction même du tétraèdre, OD et OA ne peuvent être situés de côtés différents par rapport à ce plan ; donc AOD < 90 degrés. On démontrerait de la même manière qu'une inégalité pareille a lieu pour les angles DOB, DAO, DAB, DBO, DBA.

Maintenant, de OB < OD, on conclut ODB < OBD < 90 degrés; de OA < OD, on conclut ODA < OAD < 90 degrés ; enfin, de BD > BO, DA > OA, on déduit

$$\mathrm{BD}^2 + \mathrm{DA}^2 > \mathrm{BO}^2 + \mathrm{OA}^2.$$

Or, l'angle BOA étant aigu ou droit, on a $\mathrm{BO}^2 + \mathrm{OA}^2 >$ ou $= \mathrm{BA}^2$; donc aussi

$$\mathrm{BD}^2 + \mathrm{DA}^2 > \mathrm{BA}^2 ;$$

donc l'angle BDA ne peut surpasser 90 degrés.

Le nombre des angles droits du tétraèdre ne peut d'ailleurs surpasser quatre, le tétraèdre ne possédant pas plus de quatre faces.

Scolie. — Les propriétés du tétraèdre principal sont plus restreintes que celles dont jouit le triangle principal dans les Réseaux. Ses angles dièdres ne sont pas nécessairement tous aigus : il ne possède pas nécessairement tous les paramètres minima du système; enfin, le triangle principal d'aire minimum peut ne pas être l'une de ses quatre faces.

(*) Pour la définition de ces termes, *voyez* la note (*) de la page 63.

Voici, sans démonstration, l'énoncé de diverses propriétés appartenant au tétraèdre principal.

THÉORÈME XLII. — *Si b est le plus grand des deux paramètres minima de l'Assemblage, et si* B *est l'angle opposé au côté b dans le triangle principal construit sur ces paramètres, la hauteur du tétraèdre principal sera au moins égale à* $b\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{coséc}^2 B}$.

Corollaire. — Cette même hauteur sera au moins égale à $b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME XLIII. — *Le plus petit des paramètres de l'Assemblage, en dehors du plan contenant les deux paramètres minima, est nécessairement l'une des trois arêtes qui joignent le sommet du tétraèdre principal aux trois sommets de sa base.*

THÉORÈME XLIV. — *Si* OB, OA (fig. 21) *sont les deux arêtes minima du tétraèdre principal* OABD, OA *étant la plus petite des deux, et si par* B *on mène la droite* BO′ *égale et parallèle à* OA, *l'un des quatre triangles* AOB, AOD, BOD, BO′D *sera le triangle élémentaire à aire minimum de tout l'Assemblage.*

Corollaire. — Le plan réticulaire à aire minimum contient toujours au moins l'un des deux paramètres minima de l'Assemblage.

§ V. — DES ASSEMBLAGES SYMÉTRIQUES.

Définitions. — Je nomme *axe de symétrie* d'un Assemblage toute droite telle, que, l'Assemblage venant à tourner d'un certain angle, et tout d'une pièce, autour d'elle, les mêmes points de l'espace coïncident avec les Sommets de cet Assemblage, avant et après la rotation. Je dis alors que le lieu apparent des Sommets de l'Assemblage a été restitué, après cette rotation.

Pour plus de précision dans les explications qui vont suivre, je supposerai qu'il existe deux Assemblages égaux, superposés Sommet sur Sommet, de manière à figurer un Assemblage unique. L'un de ces Assemblages sera considéré comme invariable de position; l'autre pourra se mouvoir tout d'une pièce, et comme un corps solide, soit par translation, soit par rotation.

Lorsque l'Assemblage mobile, tournant autour de l'axe, reviendra en coïncidence avec l'Assemblage fixe, après une rotation d'un demi-tour, ou de 180 degrés, l'axe sera désigné sous le nom d'*axe de symétrie binaire*, ou, plus brièvement, d'*axe binaire*. Un Sommet quelconque de l'Assemblage aura son *homologue* de l'autre côté de l'axe; la droite joignant ces deux Sommets sera normale à l'axe, et divisée par lui en deux parties égales.

Lorsque la coïncidence se rétablira après un tiers, un quart, un sixième de tour, l'axe de rotation recevra le nom d'*axe de symétrie ternaire, quaternaire, sénaire*. Dans les Assemblages à axe de symétrie ternaire, les Sommets sont disposés trois par trois autour de l'axe, et chaque Sommet a deux *homologues*. La disposition est de quatre par quatre autour des axes quaternaires, et de six par six autour des axes sénaires.

La symétrie d'un axe aura pour *numéro d'ordre* 2, 3, 4 ou 6, selon qu'elle sera binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire. Ce numéro d'ordre sera désigné par la lettre q, dans le courant des calculs.

Deux axes de symétrie de même ordre seront dits *axes de même espèce*, lorsque la configuration des Sommets autour de l'un d'eux sera la même qu'autour de l'autre. Pour constater cette similitude de configuration, on lie par la pensée les Sommets de l'Assemblage à chacun des deux axes, et l'un de ces deux systèmes est supposé mobile. Alors, si l'on peut faire coïncider en même temps l'axe mobile avec l'axe fixe, les Sommets mobiles avec les Sommets fixes, les axes seront dits *de même espèce*.

Pour que les axes soient de même espèce, il faut qu'ils soient du même ordre et que leurs paramètres soient égaux : ces conditions sont, en général, suffisantes. Il y a cependant un cas particulier où deux axes binaires peuvent avoir le même paramètre, sans être de même espèce.

Deux axes qui ne satisfont pas aux conditions précédentes seront dits *axes d'espèces différentes*.

Tout Assemblage possédant un ou plusieurs axes de symétrie sera dit *Assemblage symétrique;* dans le cas contraire, il sera dit *asymétrique*.

Tout plan qui partage un Assemblage en deux moitiés géométriquement symétriques sera nommé *plan de symétrie* de l'Assemblage. Chaque Sommet trouve alors son *homologue* sur le côté opposé du plan.

THÉORÈME XLV. — *Le plus petit angle qui restitue les lieux des Sommets d'un Assemblage symétrique, pendant sa rotation autour d'un axe de symétrie, est un sous-multiple de 360 degrés.*

Soient M (*fig.* 13) l'un des Sommets de l'Assemblage, et MO la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe. Donnons, autour de l'axe, à l'Assemblage mobile une rotation MOM′ qui ne trouble pas les lieux des Sommets, et soit

$$MOM' = Q.$$

Pendant que le Sommet mobile M viendra se superposer au Sommet fixe M′, le Sommet mobile M′ viendra en M″, et nous aurons

$$OM'' = OM' = OM, \qquad M''OM' = Q.$$

Décrivons un cercle de centre O et de rayon OM, puis faisons

$$\text{arc}\, M''M' = \text{arc}\, M'M, \qquad \text{arc}\, M'''M'' = \text{arc}\, M''M';$$

il est clair que M, M′, M″, ..., seront autant de Sommets de l'Assemblage fixe, et que les cordes des arcs formeront un polygone régulier inscrit, lequel, après un ou plusieurs tours, viendra se fermer sur lui-même, au point de départ, en M : sans cela, il y aurait une infinité de Sommets de l'Assemblage sur la circonférence du cercle, ce qui est impossible. D'ailleurs on peut toujours supposer que M, M′ sont deux sommets voisins, et alors MOM′ sera le plus petit angle de rotation qui restitue les lieux des Sommets. On aura donc, en nommant Q cet angle minimum,

(61) $$Q = \frac{360^\circ}{q}.$$

THÉORÈME XLVI. — *Un Assemblage ne peut posséder que des axes de symétrie binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire.*

Sur MM′, M′M″ (*fig.* 13), achevons le losange MM′M″*m*; le point *m* sera un Sommet de l'Assemblage, et nous trouverons facilement

$$Om = OM'(1 - 4\sin^2 \tfrac{1}{2}Q).$$

Pour $q = 2$, $Q = 180^\circ$, nous avons $Om = -3OM'$;
Pour $q = 3$, $Q = 120^\circ$, $Om = -2OM'$;
Pour $q = 4$, $Q = 90^\circ$, $Om = -OM'$;
Pour $q = 5$, $Q = 72^\circ$, $Om = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}OM' = -0{,}382\,OM'$;
Pour $q = 6$, $Q = 60^\circ$, $Om = 0$;
Pour $q > 6$, $Q = < 60^\circ$, $Om < OM'$.

Les solutions $q=5$ et $q>6$ ne sont évidemment pas admissibles ; car on peut toujours supposer que M a été pris à la distance minimum de l'axe de rotation, et, par conséquent, l'inégalité $Om < OM'$ est impossible, sauf dans le cas où l'on aurait $Om = 0$, parce qu'alors O serait un Sommet de l'Assemblage.

Donc, si l'Assemblage a un axe de symétrie, on aura nécessairement

$$q = 2,\ 3,\ 4 \text{ ou } 6,$$

q étant le numéro d'ordre de la symétrie propre à l'axe que l'on considère.

Corollaire. — Des rotations de 60, 90, 120, 180, 240, 270 et 300 degrés sont les seules qui puissent restituer, dans certains cas, les lieux des Sommets d'un Assemblage.

Théorème XLVII. — *Lorsqu'il existe, dans un Assemblage, un axe de symétrie ne passant par aucun Sommet, les droites parallèles, menées par des Sommets, sont des axes possédant la même symétrie.*

Soit q le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe considéré MM' (*fig.* 22), et soit m un Sommet quelconque, lequel, après une rotation, égale à $\frac{360°}{q}$ de l'Assemblage mobile, vient occuper le lieu du Sommet m'. Si l'on transporte parallèlement à lui-même, et de m' en m, l'Assemblage mobile qui aura subi cette rotation préalable, il se trouvera placé dans les mêmes conditions que s'il eût tourné, dès le principe, autour d'une droite nmn', menée par m parallèlement à MM' ; et, comme le lieu des Sommets n'a pas été troublé, cette droite nmn' est aussi un axe de symétrie de l'Assemblage. L'ordre de symétrie de cet axe sera, en général, égal à q. Toutefois, comme un axe d'ordre jq, j étant un nombre entier quelconque, jouit *à fortiori* des propriétés des axes d'ordre q, il pourrait arriver que le nouvel axe fût d'un ordre plus élevé, mais qui devra toujours être un multiple de l'ordre de symétrie de l'axe donné (*).

Définition. — Nous désignerons sous le nom d'*axes intermédiaires* les axes

(*) Cette démonstration est due à M. Cauchy : comme elle est plus simple que la démonstration que j'avais donnée moi-même de ce théorème, je l'ai substituée à cette dernière. (*Voyez* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXIX, p. 135.)

qui ne contiennent aucun Sommet de l'Assemblage. D'après le théorème précédent, les axes intermédiaires sont toujours accompagnés d'axes de même symétrie, menés par les Sommets; d'où il résulte que l'on peut, à la rigueur, se borner à considérer ces derniers, dans toute recherche qui n'a pas pour but de déterminer d'une manière spéciale les propriétés propres aux axes intermédiaires.

Théorème XLVIII. — *Tout axe de symétrie contenant un Sommet est une des Rangées de l'Assemblage.*

Soit MM′ (*fig.* 22) l'axe donné passant par le Sommet M; soient m un autre Sommet extérieur à l'axe, et m', m'',..., ses homologues par rapport à cet axe. Joignons Mm, Mm', Mm'',...: si maintenant nous traçons la diagonale $M\mu$ du parallélogramme construit sur Mm, Mm', cette diagonale sera, en grandeur et en direction, un des paramètres de l'Assemblage, d'après le théorème XXX. De même, si l'on combine $M\mu$ avec Mm'', la nouvelle diagonale $M\mu'$ jouira des mêmes propriétés. Le résultat final, ainsi obtenu, après avoir épuisé la série des homologues de m, sera le même que si l'on eût composé mécaniquement des forces égales en grandeur et en direction à Mm, Mm', Mm'',..., pour en obtenir la résultante. Or, si l'on décompose chacune de ces forces suivant MM′, et normalement à cette droite, il est visible que les composantes normales à MM′ s'entre-détruiront par suite de la symétrie, et que les composantes verticales subsisteront seules. Si donc O est le point de rencontre de MM′ avec le plan du polygone $mm'm''$..., chacune de ces composantes verticales sera égale à MO: donc, si l'on prend $MM' = q\,MO$, M′ sera aussi un Sommet; donc MM′ est une Rangée de l'Assemblage.

Théorème XLIX. — *Tout plan mené par un Sommet normalement à un axe de symétrie est un plan réticulaire de l'Assemblage.*

Soient M le Sommet donné (*fig.* 22), et MM′ l'axe donné, que l'on peut toujours supposer passant par M. Soient m un autre Sommet quelconque, et m', m'' ses homologues. Les lignes menées par M parallèlement à mm', $m'm''$, $m''m$,..., sont évidemment des Rangées de l'Assemblage; donc le plan normal à MM′, et qui contiendra toutes ces droites, sera l'un des plans réticulaires du système.

Si l'axe MM' était un axe binaire, on aurait recours à un deuxième Sommet μ situé hors du plan mMM'; alors la même démonstration serait encore applicable.

Théorème L. — *Lorsqu'il existe dans un Assemblage un plan de symétrie ne contenant aucun Sommet, tout plan parallèle passant par un Sommet est aussi un plan de symétrie du système.*

Soient m (*fig.* 23) un Sommet quelconque, et m' son homologue de l'autre côté du plan donné GH, qui est, par hypothèse, un plan de symétrie de l'Assemblage. Si l'on transporte parallèlement à lui-même, et de m' en m, c'est-à-dire suivant une direction normale au plan, l'Assemblage mobile, on sait qu'il continuera à être le symétrique de l'Assemblage fixe par rapport au plan normal sur le milieu de la droite qui joint le point mobile m' au point fixe m; à la limite, lorsque m' coïncidera avec m, le plan de symétrie, toujours parallèle à lui-même, finira par passer par m : mais alors les deux Assemblages, le mobile et le fixe, coïncideront; donc le plan mené par m, parallèlement à GH, sera un plan de symétrie du système.

Scolie. — On peut faire abstraction des plans de symétrie *intermédiaires*, pour ne considérer que ceux passant par des Sommets.

Théorème LI. — *Tout plan de symétrie contenant un Sommet est un plan réticulaire.*

Soit M (*fig.* 23) le Sommet situé dans le plan de symétrie GH; soient m, m' deux Sommets homologues par rapport à ce plan. La diagonale du losange construit sur Mm, Mm' sera, en grandeur et en direction, le paramètre de l'une des Rangées du système : or il est évident qu'elle est contenue dans le plan de symétrie. On prouverait, de même, qu'il existe d'autres Rangées passant par M, et appartenant au plan de symétrie, mais non situées dans le plan mMm'; d'où l'on voit que le plan de symétrie est nécessairement un plan réticulaire.

Théorème LII. — *Lorsqu'un Assemblage possède un axe de symétrie d'ordre pair, il possède aussi un système de plans de symétrie tous normaux à cet axe, et, réciproquement, la présence d'un plan de symétrie entraîne celle d'un système d'axes d'ordre pair, normaux à ce plan.*

J'ai démontré, dans une Note sur les polyèdres symétriques de la géo-

métrie (*), que, si l'on fait tourner de 180 degrés le polyèdre *inverse* d'un polyèdre donné P, autour d'une droite A menée par le *pôle de symétrie*, on obtient le polyèdre symétrique de P par rapport au plan de symétrie mené par le pôle normalement à la droite A.

Prenons un Sommet quelconque O (*fig.* 23) pour pôle de symétrie, et construisons l'Assemblage inverse, lequel coïncidera, Sommet à Sommet, avec le primitif; puis, ayant mené par O une droite mOm' parallèle à l'axe d'ordre pair, faisons tourner de 180 degrés l'Assemblage inverse autour de cette droite; il devra recoïncider avec lui-même, Sommet à Sommet, par suite de la symétrie de l'axe. Donc, en vertu de la propriété générale citée plus haut, le plan mené par O normalement à l'axe sera un plan de symétrie pour les deux Assemblages coïncidents, et, par conséquent, pour les deux moitiés de l'Assemblage donné (**).

Le théorème réciproque se démontrera de la manière suivante :

Soit O (*fig.* 23) un Sommet situé sur le plan de symétrie commun à l'Assemblage fixe et à l'Assemblage mobile : on sait, par la théorie générale des polyèdres inverses (*voyez* la Note citée), qu'en faisant tourner de 180 degrés le polyèdre symétrique d'un polyèdre P autour de la normale au plan de symétrie élevée à partir de ce Sommet O, on doit retrouver le polyèdre inverse; dans le cas actuel, en faisant faire ce demi-tour à l'Assemblage mobile, on le fera recoïncider avec l'Assemblage inverse, lequel évidemment ne diffère pas de l'Assemblage donné. Donc la normale est un axe binaire du système. Dans le cas général, on voit qu'elle peut être un axe d'ordre pair quelconque (***).

Définition. — En continuant à désigner par *système de Rangées* l'ensemble de toutes les Rangées parallèles entre elles dans un Assemblage, on a à considérer dans un tel système *la direction, la grandeur du para-*

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. XIV, p. 138.

Le polyèdre *inverse* de P s'obtient en joignant les sommets de P à un point fixe qui prend le nom de *pôle de symétrie*, et prolongeant ces droites au delà du pôle de quantités égales à elles-mêmes.

(**) On peut aussi considérer ce théorème comme une conséquence immédiate du théorème XXI de mon Mémoire « Sur les Polyèdres de forme symétrique », inséré dans le tome XIV du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville.

(***) Ce théorème réciproque est une conséquence immédiate du théorème IV de mon Mémoire « Sur les Polyèdres de forme symétrique ».

mètre, et enfin *la densité du système*, qui est égale au nombre des Rangées contenues dans un prisme indéfini de section normale égale à 1, et à arêtes parallèles à la direction commune des Rangées.

Il résulte de la constance des volumes des parallélipipèdes générateurs qu'en passant d'un système de Rangées à un autre, le quotient du paramètre par la densité reste toujours constant et égal au volume Ω du parallélipipède générateur.

Lorsqu'on altère un système de Rangées par l'intercalation de nouveaux Sommets équidistants, entre deux Sommets voisins sur chaque Rangée, on modifie l'Assemblage, et, selon que le nombre des Sommets intercalaires est 1, 2, 3,..., sur chaque paramètre, le nouvel Assemblage est un Assemblage doublé, triplé, quadruplé,..., quant au nombre de ses Sommets. Alors le volume Ω du parallélipipède générateur diminue dans le rapport de l'unité aux nombres 2, 3, 4,.... Ceci posé, l'on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème LIII. — *Les mêmes systèmes de Rangées se retrouvent dans l'Assemblage primitivement donné et dans l'Assemblage qui en dérive par l'intercalation de nouveaux Sommets sur l'un de ses systèmes de Rangées.*

Soient prises trois Rangées conjuguées pour axes coordonnés, l'axe des z étant l'une des Rangées du système modifié par l'intercalation de nouveaux Sommets : alors, si a, b, d sont les trois paramètres de ces axes, a, b, $\frac{d}{\vartheta}$ seront les trois paramètres dans le nouvel Assemblage, $\vartheta - 1$ étant le nombre des Sommets ajoutés sur chaque paramètre. Pour revenir à l'Assemblage primitif on supprimera dans celui-là tous les plans réticulaires de la forme

$$z = j\vartheta + 1, \quad = j\vartheta + 2, \ldots, \quad = j\vartheta + \vartheta - 1,$$

j étant un nombre entier quelconque, et l'on ne conservera que les plans $z = 0$, $z = \vartheta$, $z = 2\vartheta, \ldots$, $z = j\vartheta$.

Considérons maintenant la Rangée menée de l'origine O (*fig.* 20) au Sommet t à coordonnées (m, n, p) de l'Assemblage à Sommets intercalaires. Alors, si l'ordonnée p est un multiple de ϑ, le Sommet t appartiendra à l'Assemblage primitif; le système des Rangées Ot se retrouvera dans l'Assemblage primitif, avec la même grandeur de paramètre. Si l'ordonnée p

n'est pas un multiple de θ, on prolongera Ot de $tt'' = (\theta - 1)\,Ot$; l'ordonnée numérique du Sommet t'' parallèlement aux z étant alors devenue un multiple de θ, le point t'' appartiendra à l'Assemblage primitif : ainsi le système des Rangées Ot subsistera encore dans l'Assemblage, après la suppression des plans réticulaires

$$z = j\theta + 1, \quad z = j\theta + 2, \ldots, \quad z = j\theta + \theta - 1.$$

Donc tous les systèmes de Rangées subsistent, sans que leur direction soit troublée, après la suppression des Sommets intercalaires. Ces systèmes sont seulement altérés, soit dans leur densité, soit dans la grandeur de leur paramètre; pour chacun d'eux, la suppression des Sommets fait croître, dans le rapport $\theta : 1$, le rapport du paramètre à la densité.

Corollaire. — Les mêmes systèmes de Rangées se retrouvant dans les deux Assemblages, avec des modifications qui ne portent que sur la grandeur du paramètre ou la densité du système, il en résulte que les mêmes systèmes de plans réticulaires existent aussi dans les deux Assemblages; toutefois l'épaisseur des strates, ou l'aire de la maille génératrice, variera de l'un à l'autre, de manière à ce que leur produit croisse, dans le rapport $\theta : 1$, par la suppression des Sommets intercalaires.

Après ces théorèmes généraux, nous allons successivement passer en revue les propriétés qui caractérisent chaque genre particulier de symétrie.

Symétrie binaire.

THÉORÈME LIV. — *Dans tout Assemblage à axe de symétrie binaire, si l'on considère les deux plans réticulaires limitrophes d'un plan réticulaire normal à l'axe binaire, le Réseau de l'un de ces deux plans coïncide avec la projection orthogonale du Réseau de l'autre.*

Car, soient P un plan réticulaire normal à l'axe, P′ et P″ ses deux limitrophes; les Réseaux de P′ et P″ sont homologues par rapport au plan P qui est un plan de symétrie de l'Assemblage (théorème LII) : donc le Réseau de l'un des plans P′, P″ est la projection orthogonale du Réseau de l'autre.

Corollaire. — Si l'on affecte des numéros d'ordre à tous ces plans réticulaires successifs, tous normaux à l'axe, on voit que, dans la série des plans à numéro d'ordre pair, le même Réseau se reproduira, en projection

orthogonale; il en sera de même dans la série des plans à numéro d'ordre impair.

Théorème LV. — *Tout Assemblage à axe de symétrie binaire peut être considéré comme dérivant d'un prisme droit à base parallélogrammique, lequel peut, dans certains cas, offrir en son centre de figure l'un des Sommets de l'Assemblage.*

Soit ABCDE (*fig.* 24) le Réseau tracé sur le plan normal à l'axe binaire et passant par un Sommet A. Prenons ce plan pour plan des xy; son équation en coordonnées numériques sera $z = 0$.

Tous les Réseaux tracés sur les plans $z = \pm 2$, $z = \pm 4$, $z = \pm 6$,..., se projetteront orthogonalement sur le Réseau ABCD... (théorème LIV).

Les Réseaux des plans $z = \pm 1$, $z = \pm 3$,..., pourront aussi se projeter orthogonalement sur ABCD,...; dans ce cas, le parallélipipède générateur sera un prisme droit à base parallélogrammique.

Mais le contraire pourra aussi avoir lieu. Supposons alors que l'un des Sommets A′ du Réseau $z = 1$ se projette en a sur le plan $z = 0$. Si l'on joint A avec A′, et si l'on prolonge AA′ d'une quantité égale à elle-même, jusqu'en D″, D″ sera évidemment un Sommet du Réseau $z = 2$; et si l'on abaisse les perpendiculaires A′a, D″D, D sera l'un des Sommets du Réseau $z = 0$ (théorème LIV), et a sera situé au milieu de la longueur aD. Le Sommet A ayant été choisi arbitrairement, on voit que a est un centre géométrique du Réseau ABCD,..., et occupe le milieu de l'un des paramètres AD de ce Réseau. Maintenant, sur AD comme base, construisons deux triangles élémentaires égaux et opposés, tels que ACD, AED; le point a sera le centre du parallélogramme générateur ACDE, et A′ sera le centre de figure du prisme droit ayant pour base inférieure ACDE, et sa base supérieure sur le plan $z = 2$. L'Assemblage pourra donc être considéré comme composé d'une infinité de tels prismes, de hauteur égale à l'intervalle compris entre les plans $z = 0$, $z = 2$, et portant en outre, chacun en son centre de figure, l'un des Sommets de l'Assemblage.

Scolie I. — Il est toujours permis de supposer que A a été choisi de manière à être, parmi tous les Sommets du Réseau $z = 0$, le plus voisin du point a; alors, si AD n'est pas le paramètre minimum du Réseau $z = 0$, soit AB ce paramètre minimum, porté dans un sens tel, que l'on ait

BAD < 90 degrés. Puisque l'on a $aB > aA$, le Sommet B est en dehors de la circonférence décrite sur AD comme diamètre, et ainsi il est certain que l'on a ABD < 90 degrés. Mais, d'autre part, à cause de AB < BD, on a aussi ADB < BAD < 90 degrés; donc les trois angles du triangle BAD sont aigus : ainsi, BAD sera le triangle principal du Réseau $z = 0$ (théorème VI). Donc la projection de A' tombera toujours sur le milieu de l'un des trois côtés du triangle principal; ce qui prouve que l'alternance des Réseaux à numéros d'ordre alternativement pairs et impairs ne peut se faire que de trois manières différentes, selon que la projection des Sommets du Réseau $z = 1$ se fait sur le milieu du petit, du moyen, ou du grand côté du triangle principal du Réseau $z = 0$.

D'où l'on voit encore que l'Assemblage peut aussi être considéré comme composé de prismes ayant pour base un parallélogramme tel que ABCD, ayant pour hauteur l'intervalle compris entre les plans $z = 0$ et $z = 2$, et portant des Sommets sur les centres de deux de leurs faces verticales rectangulaires; la base de chacune des deux faces *centrées* peut toujours alors être supposée formée par l'un des trois côtés du triangle principal.

Scolie II. — Dans le cas de l'alternance des Réseaux, on peut encore substituer au prisme droit centré l'octaèdre de la *fig.* 28, dont l'axe A'A'' traverse normalement et centralement la base parallélogrammique ACDE.

Il doit être entendu que cet octaèdre n'est point pour cela un *solide générateur,* capable de reproduire, par des juxtapositions immédiates, tous les Sommets de l'Assemblage.

Symétrie terbinaire.

THÉORÈME LVI. — *Si le solide générateur de l'Assemblage est un prisme droit à base rhombe, centré ou non centré, l'Assemblage possède trois axes de symétrie binaire rectangulaires entre eux.*

Supposons que le rhombe ACDE (*fig.* 24) soit la base du prisme droit générateur; alors, si l'on jette les yeux sur la *fig.* 25, qui représente, sur le plan $z = 0$, 1° le Réseau $z = 0$, dont les Rangées sont figurées par des lignes pleines, et en projection sur ce Réseau, les Réseaux $z = 2j$, ainsi que les Réseaux $z = 2j + 1$, mais ces derniers, dans le cas seulement de la

superposition de toutes les projections; 2° mais, pour le cas de l'alternance seulement, les Réseaux $z = 2j + 1$, figurés par les lignes pointillées *ac*, *cd*, *de*, *ae*, etc., il deviendra évident que tout plan normal au plan de la figure, et dirigé suivant une des diagonales du rhombe, par exemple suivant la ligne $\alpha\alpha'$, sera un plan de symétrie pour l'Assemblage, puisque tout est pareil à droite et à gauche de ce plan. Donc la diagonale AD, normale à ce plan, sera un axe binaire du système (théorème LII); on démontrerait de même que la seconde diagonale EC est aussi un axe binaire.

Scolie I. — Dans le cas où *a* (*fig.* 25) tomberait sur le milieu de AA', *c* sur le milieu de AC, *d* sur le milieu de ED, etc., le théorème précédent ne serait plus applicable, quoique le prisme générateur fût encore un prisme droit à base rhombe.

Scolie II. — Si le triangle principal devient équilatéral, et si, de plus, les Réseaux sont superposés, la symétrie devient sénaire, et l'Assemblage appartient à une classe spéciale, dont il sera parlé ultérieurement; mais si, dans ce cas, les Réseaux successifs sont alternants, la symétrie générale de l'Assemblage n'est pas modifiée par cette circonstance.

THÉORÈME LVII. — *Si le Réseau normal à l'axe binaire est à maille rectangulaire, l'Assemblage possède trois axes de symétrie binaire rectangulaires entre eux.*

Dans le cas où les Réseaux sont superposés sans alternance, le solide générateur est un parallélipipède rectangulaire non centré, et le théorème est évident.

Si les Réseaux sont alternants, il peut se présenter deux cas distincts : ou bien le point *a* de la *fig.* 24 tombe sur le milieu de l'hypoténuse du triangle principal, alors rectangle, ou bien sur le milieu de l'un des deux petits côtés.

Dans le premier cas, la *fig.* 26 offre la projection des Réseaux alternants sur le plan $z = 0$. Dans ce cas, les plans menés normalement au plan $z = 0$, suivant les droites AC, *ac*, ED,..., ainsi que les plans menés suivant AE, *ae*, CD,..., sont évidemment des plans de symétrie de l'Assemblage : donc alors les côtés des rectangles sont des axes binaires (théorème LII).

Dans le second cas, la projection est représentée par la *fig.* 27, où ACDE

est la maille du Réseau $z = 0$, *acde* celle du Réseau $z = 1$. Dans ce cas encore, les plans menés suivant les côtés des rectangles sont évidemment des plans de symétrie de l'Assemblage. On remarquera que, dans ce dernier cas, on peut adopter pour solide générateur un prisme droit à base rhombe; il suffit, en effet, de prendre pour base la maille du Réseau rhombique situé dans le plan normal à $z = 0$, et qui a pour trace la droite $AaEe$.

Scolie. — Si le rectangle se changeait en un carré, la symétrie deviendrait quaternaire, et l'Assemblage rentrerait dans une classe particulière, dont nous parlerons bientôt; cependant, dans le cas de l'alternance correspondant à la *fig.* 27, la symétrie resterait la même.

Définition. — Nous désignerons sous le nom de symétrie *terbinaire* celle qui est caractérisée par trois axes binaires normaux l'un à l'autre. Ces trois axes, quoique de même ordre, sont d'espèces différentes.

THÉORÈME LVIII. — *Dans tout Assemblage à symétrie terbinaire, les plans réticulaires normaux aux axes binaires sont à maille rhombique ou rectangulaire.*

Soient pris les trois axes binaires pour axes des x, des y et des z. Si l'on fait tourner l'Assemblage de 180 degrés autour de l'axe des x, le Réseau $z = 0$ doit recoïncider avec lui-même; ainsi l'axe des x doit être un axe de symétrie binaire pour le Réseau du plan des xy, ce qui exige (théorème XIV, corollaire II) que sa maille soit rhombe ou rectangulaire. Il en serait de même pour les Réseaux situés sur les plans des xz et des yz.

Corollaire. — Il résulte des théorèmes précédents que tout Assemblage terbinaire rentre dans l'une des quatre catégories suivantes :

1°. Prisme droit à base rhombe non centré, ou prisme droit rectangulaire ayant deux de ses faces latérales centrées;

2°. Prisme droit à base rhombe, centré;

3°. Prisme droit rectangulaire, non centré;

4°. Prisme droit rectangulaire, centré.

Dans les cas 2° et 4°, on peut, pour faire dériver l'Assemblage, remplacer le prisme par un octaèdre ACDEA'A'' (*fig.* 28), à base rhombe (deuxième cas), ou à base rectangulaire (quatrième cas).

Scolie. — J'ai démontré, dans mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme

symétrique », plusieurs théorèmes relatifs à la symétrie binaire. On peut les appliquer aux Assemblages, en ne perdant pas de vue qu'un Sommet quelconque peut être considéré comme étant le centre de symétrie de l'Assemblage, et le lieu de croisement de ses axes et plans de symétrie. Je me bornerai à reproduire ici l'énoncé du théorème suivant (corollaire du théorème XIII de mon Mémoire), dont la démonstration directe n'offrirait d'ailleurs aucune difficulté :

« Lorsqu'il existe deux axes binaires normaux l'un à l'autre, il en existe » toujours un troisième normal à leur plan. »

Théorème LIX. — *Les mêmes systèmes de Rangées et de plans réticulaires se retrouvent dans l'Assemblage dérivant du prisme droit centré et dans l'Assemblage dérivant du même prisme droit non centré.*

Le centrage du prisme n'est autre chose que l'intercalation d'un Sommet sur le milieu de l'une de ses quatre diagonales. Si l'on effectue la même intercalation sur tous les prismes de l'Assemblage, en opérant toujours sur la diagonale parallèle à celle primitivement choisie, il est clair que l'on aura un Assemblage doublé, dans lequel, en vertu du théorème LIII, on devra retrouver les mêmes systèmes de Rangées et de plans réticulaires que dans l'Assemblage primitif. Donc, etc.

Symétrie ternaire.

Théorème LX. — *Dans tout Assemblage possédant un axe ternaire, le Réseau des plans réticulaires normaux à l'axe est à maille triéquiangle.*

Soit M (*fig.* 11 et *fig.* 29) l'un des Sommets de l'Assemblage, choisi de manière à être aussi voisin que possible de l'axe de symétrie ternaire, sans être cependant sur cet axe. Par M, menons le plan normal à l'axe, et le coupant en O; enfin construisons le triangle équilatéral MNP autour de O comme centre.

Si O est un Sommet de l'Assemblage, le Réseau offrira la configuration représentée *fig.* 11 : M', N', P' seront aussi des Sommets, et l'axe de symétrie sera non-seulement un axe ternaire, mais, qui plus est, un axe sénaire. En effet, prenons le plan de la figure (*fig.* 11) pour plan des xy : il est clair que le Réseau des plans $z=1$, $z=2,\ldots$, se projettera orthogonalement sur

celui du plan $z=0$; car, en transportant le Réseau $z=0$ sur le plan $z=1$, parallèlement à lui-même, il faut qu'aucun des Sommets de l'hexagone MM'NN'PP' ne se rapproche de l'axe. Dans ces conditions, la droite, menée par O normalement au plan de la figure, sera évidemment un axe sénaire.

Ce cas restant réservé, nous admettrons, dans ce théorème et les suivants relatifs à la *symétrie simplement ternaire*, que le centre O (*fig.* 29) du triangle MNP n'est pas un Sommet de l'Assemblage, ce qui ne veut pas dire cependant que l'axe mené par ce point ne doit contenir aucun Sommet.

Le triangle MNP (*fig.* 29), résultat de la construction indiquée, sera évidemment le triangle principal du Réseau : donc le Réseau sera à maille triéquiangle.

Théorème LXI. — *Dans tout Assemblage à symétrie simplement ternaire, deux plans réticulaires normaux à l'axe ternaire, et séparés par deux plans réticulaires intermédiaires, ont des Réseaux qui se projettent orthogonalement l'un sur l'autre.*

Prenons le plus bas de ces quatre plans pour plan des xy, de sorte que son équation soit $z=0$. Je dis que le Réseau du plan $z=3$ se projettera orthogonalement sur le Réseau $z=0$.

Soit ABCDEF (*fig.* 29) un hexagone régulier dont les sommets appartiennent au Réseau $z=0$, et par le centre O, qui est aussi un Sommet du Réseau, menons sur son plan une normale, qui sera un axe ternaire du système (théorème XLVII). Puis, transportons parallèlement à lui-même le Réseau $z=0$ sur le plan $z=1$. Soit MNP le triangle principal du Réseau $z=1$, triangle dont la surface est percée par la normale élevée en O; la figure représente la projection orthogonale de ce triangle sur le plan $z=0$.

Si O coïncidait avec la projection de l'un des Sommets M, N, P, les Réseaux se correspondraient dans les plans $z=0$, $z=1$, et la symétrie serait sénaire.

Ce cas étant exclu, la symétrie ternaire de la normale élevée en O exige que O coïncide avec le centre du triangle MNP; et, comme ce dernier triangle doit avoir ses côtés parallèles à AB, AO, BO, il n'est susceptible que des deux positions, inverses l'une de l'autre, MNP, M'N'P'. Le triangle MNP, dont les sommets coïncident évidemment avec les centres de figure des triangles

AOF, BOC, DOE, peut être considéré comme provenant d'une translation, sans rotation, de AOB, ou de COD, ou de EOF. Le triangle M'N'P', dont les sommets sont les centres de figure de DOC, EOF, AOB, proviendrait de la translation de l'un des triangles BOC, DOE, FOA.

Supposons donc que le Réseau $z = 1$ soit, en projection, le Réseau à lignes interrompues MNP... de la figure. Alors, dans le losange AOFG, la grande diagonale OG devra passer par M, et l'on aura, par des propriétés connues du triangle équilatéral, $OM = \frac{1}{3} OG$. Si donc on joint le Sommet O au Sommet situé sur le plan $z = 1$, et qui a M pour projection, Sommet que je nommerai M_1 (et qui n'est point indiqué sur la figure), l'oblique OM_1 sera l'origine d'une Rangée de paramètre OM_1. En prenant sur cette Rangée une longueur $OG_3 = 3\,OM_1$, le Sommet G_3 (qui n'est point marqué sur la figure) devra évidemment avoir sa projection en G, et, de plus, il appartiendra au plan $z = 3$. D'où l'on voit que le Réseau $z = 3$ se projette sur le Réseau $z = 0$.

Deuxième démonstration. — Soit OO'O''O''' (*fig.* 30) l'axe ternaire passant par le Sommet O qui est censé appartenir au plan $z = 0$; cet axe est coupé en O', O'' par les plans $z = 1$, $z = 2$, et au point O''' par le plan $z = 3$. Le triangle équilatéral M'N'P' de la figure est la maille triangulaire du Réseau du plan $z = 1$, et il a son centre en O' sur l'axe ternaire.

Par l'axe OO''' et par l'un des trois Sommets M', N', P', par exemple par M', menons le plan M'OO'*m'* qui coupera N'P' en son milieu *m'* et sera perpendiculaire à cette ligne. Sur OP', ON', comme côtés, construisons le rhombe ON'P'M'' dont le quatrième Sommet M'' appartiendra à l'Assemblage, sera situé dans le plan $z = 2$, et sera, en outre, évidemment contenu dans le plan M'OO'*m'*.

On aura alors

$$M''O'' = 2\,O'm' = M'O',$$
$$O'''O'' = OO',$$
$$OO'M' = 90° = O'''O''M''.$$

Donc les triangles OO'M' et O'''O''M'' sont égaux : donc M''O''' est égal et parallèle à OM'; ainsi O''' est aussi un Sommet de l'Assemblage (théorème XXX). Donc les Sommets du Réseau $z = 3$ se projettent orthogonalement sur ceux du Réseau $z = 0$.

Scolie. — On voit facilement que le Réseau pointillé $M'N'P'\ldots$ (*fig.* 29) sera la projection orthogonale du Réseau du plan $z = 2$.

Si, au contraire, le Réseau $M'N'P'\ldots$ avait été la projection orthogonale du Réseau $z = 1$, alors $MNP\ldots$ eût été celle du Réseau $z = 2$.

Corollaire. — Si, sur la Rangée OG_3, l'on supprime le Sommet M_1, ainsi que celui qui vient après M_1 sur la même Rangée, et si l'on fait la même opération sur tout le système des Rangées parallèles à OG_3, et qui partent des Sommets du Réseau $z = 0$, on changera l'Assemblage ternaire en un Assemblage sénaire qui aura pour noyau un prisme droit à base rhombe de 60 et 120 degrés. Réciproquement, on passera de l'Assemblage sénaire à l'Assemblage ternaire correspondant, trois fois plus riche en Sommets, en intercalant deux nouveaux Sommets sur chaque paramètre d'un système de Rangées parallèles à l'une des deux grandes diagonales du prisme générateur à base rhombe.

Mais il importe de remarquer que l'on obtient ainsi deux Assemblages distincts, selon que l'on a choisi l'une ou l'autre des deux diagonales; ces Assemblages ont la propriété de coïncider, lorsque l'on fait tourner l'un d'eux de 180 degrés autour de l'axe ternaire. Ainsi, d'un même Assemblage sénaire peuvent dériver deux Assemblages ternaires, distincts par leur situation dans l'espace, un Assemblage ternaire *direct* et un Assemblage ternaire *inverse*.

Théorème LXII. — *Tout Assemblage à symétrie simplement ternaire a pour noyau un rhomboèdre.*

Reprenons la *fig.* 30 et la deuxième démonstration du théorème précédent. Faisons tourner de 120 degrés autour de OO''' le parallélogramme $OM'O'''M''$: le Sommet M' viendra se substituer successivement à N' et à P'; le Sommet M'' viendra se substituer à N'' et à P''. Or, de même que les quatre Sommets O, N', P', M'' forment un rhombe plan, $OM'N'P''$, $OM'P'N''$ seront aussi des rhombes plans égaux au précédent, et il est visible qu'il en sera de même des trois faces supérieures.

Le solide ainsi obtenu sera donc un rhomboèdre, et comme il ne renferme aucun Sommet de l'Assemblage, ni dans son intérieur, ni sur ses

faces ou arêtes, il pourra être considéré comme étant le parallélipipède générateur ou noyau de l'Assemblage.

Corollaire. — On peut aussi faire dériver l'Assemblage de l'un des tétraèdres élémentaires OM'N'P', O'''M''N''P'' (*fig.* 30): les quatre sommets suffisent pour fixer complétement le système entier de l'Assemblage; mais ce tétraèdre n'est point un solide générateur proprement dit.

Théorème LXIII. — *Tout Assemblage à symétrie ternaire possède trois plans de symétrie passant par l'axe et perpendiculaires aux trois directions des côtés du triangle principal du Réseau des plans normaux à l'axe.*

La *fig.* 29 représente en projection orthogonale les trois Réseaux des plans $z=0$, $z=1$, $z=2$; tous les autres Réseaux des plans $z=p$ se projettent sur les précédents, les Réseaux de la forme $z=3j$ sur le Réseau $z=0$, ceux de la forme $z=3j+1$ sur le Réseau $z=1$, ceux de la forme $z=3j+2$ sur le Réseau $z=2$. Soit menée par O la droite OMG normale au côté AF, et par cette droite un plan normal au plan de la figure. Ce plan sera évidemment un plan de symétrie pour chacun des trois Réseaux; il sera donc un plan de symétrie de l'Assemblage.

De même, les plans menés par O normalement aux côtés AB, BC seraient aussi des plans de symétrie; d'ailleurs la symétrie ternaire exige que ces plans soient au nombre de trois. Donc, etc.

Les plans menés par O, normalement au plan de la figure, et parallèlement aux côtés, ne sont pas des plans de symétrie de l'Assemblage.

Scolie. — Les cristallographes désignent sous le nom de *section principale du rhomboèdre,* tout plan tel que OM'm''O'''M''m' (*fig.* 30) qui passe par l'axe géométrique du rhomboèdre et par deux de ses six sommets latéraux, tels que M' et M'': OO''' est dit l'*axe du rhomboèdre.*

On voit, d'après cela, que les trois sections principales du rhomboèdre servant de noyau à un Assemblage ternaire sont des plans de symétrie pour cet Assemblage.

Théorème LXIV. — *Dans les Assemblages à symétrie ternaire, tout côté de la maille triéquiangle d'un Réseau normal à l'axe ternaire est un axe binaire de l'Assemblage.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes LII et LXIII. On le

voit, d'ailleurs, clairement sur la *fig.* 29, en considérant le Réseau MNP comme appartenant au plan $z = 1$, et le Réseau M′N′P′ comme appartenant au plan $z = -1$. Alors, après une rotation de 180 degrés autour de la droite AOD, M vient en P′, P en M′, etc.; de sorte que le Réseau $z = 1$ prend la place du Réseau $z = -1$, et *vice versâ*. De même, les Réseaux $z = p$ et $z = -p$ se substitueraient l'un à l'autre; donc AOD est un axe binaire.

Symétrie quaternaire.

Théorème LXV. — *Dans tout Assemblage à axe de symétrie quaternaire, le Réseau des plans réticulaires normaux à l'axe quaternaire est à maille carrée.*

Soit M (*fig.* 31) l'un des Sommets de l'Assemblage placé à la distance minimum de l'axe quaternaire, mais hors de cet axe. De M menons un plan normal à l'axe, et qui le coupe au point O; puis, dans le cercle de centre O et de rayon OM, inscrivons un carré M M′M″M‴ dont M soit un des sommets : les quatre points M, M′, M″, M‴ appartiendront au Réseau de ce plan. Alors, si le point O est l'un des Sommets de l'Assemblage, le Réseau aura pour parallélogramme générateur le carré OM*m*M′, et le carré M M′M″M‴, dans le cas contraire.

Théorème LXVI. — *Tout Assemblage à axe de symétrie quaternaire dérive du prisme droit à base carrée, centré ou non centré.*

L'axe quaternaire possédant évidemment toutes les propriétés d'un axe binaire, le noyau de l'Assemblage sera un prisme droit à base parallélogrammique, centré ou non centré (théorème LV).

Si le prisme n'est pas centré, tous les Réseaux des plans $z = p$ se projetteront sur celui du plan $z = 0$ normal à l'axe quaternaire, et il en résultera, en projection orthogonale, la disposition indiquée par la *fig.* 32.

Si le prisme est centré, les Réseaux des plans $z = 2j$ se projetteront encore sur le Réseau à maille carrée $z = 0$; mais, quant aux plans $z = 2j + 1$, la projection de leurs Sommets se fera (*fig.* 32) sur le milieu de l'un des trois côtés du triangle principal ABC (théorème LV, scolie I): or elle ne peut se faire ni sur O′, ni sur O″; car le prisme droit élevé sur le carré ABCD, comme base, aurait deux de ses faces latérales centrées, et les deux

10.

autres non centrées, résultat évidemment incompatible avec la symétrie des axes quaternaires menés par les Sommets A, B, C, D. Donc la projection du Réseau $z = 1$ se fera en O, c'est-à-dire sur les centres des carrés du Réseau $z = 0$, comme l'indique la *fig.* 33.

Corollaire I. — Le théorème LIII peut être appliqué aux Assemblages quaternaires. Les mêmes systèmes de Rangées et de plans réticulaires se retrouvent dans l'Assemblage dérivant du prisme droit centré et dans l'Assemblage dédoublé que l'on obtient en supprimant les Sommets placés aux centres des prismes.

Corollaire II. — On peut substituer au prisme droit centré à base carrée l'octaèdre à base carrée de la *fig.* 28; toutefois ce solide n'est pas un solide générateur de l'Assemblage.

Théorème LXVII. — *Dans le cas du prisme droit à base carrée, non centré, les quatre arêtes latérales sont des axes de symétrie quaternaire : les parallèles à ces axes menées par les centres des bases carrées sont aussi des axes quaternaires; mais ces axes sont du genre de ceux que nous avons nommés axes intermédiaires, et ne renferment aucun des Sommets de l'Assemblage.*

Théorème LXVIII. — *Dans le cas du prisme droit centré à base carrée, tous les axes de symétrie quaternaire sont des Rangées, et ont pour paramètre la hauteur du prisme.*

Théorème LXIX. — *Dans tout Assemblage quaternaire, il existe des plans de symétrie passant par l'axe, et dirigés, les uns suivant les côtés, les autres suivant les diagonales du carré générateur du Réseau normal à l'axe quaternaire.*

Corollaire. — Chaque côté et chaque diagonale du carré générateur du Réseau normal à l'axe quaternaire sont des axes binaires de l'Assemblage (théorème LII).

Définitions. — Les axes parallèles aux côtés des carrés seront dits axes binaires *de première espèce;* les axes parallèles aux diagonales de ces carrés seront dits axes binaires *de deuxième espèce.* Les premiers ont le côté du carré, et les autres la diagonale du même carré, pour paramètre.

Ces quatre systèmes d'axes se coupent sous des angles de 45 degrés et de 90 degrés.

Ces divers énoncés n'exigent aucune démonstration.

Symétrie sénaire.

Théorème LXX. — *Dans tout Assemblage à axe sénaire, le Réseau des plans normaux à l'axe est à maille triéquiangle, et les divers Réseaux de ces plans se projettent orthogonalement les uns sur les autres.*

Soit M (*fig.* 11) l'un des Sommets, pris hors de l'axe, au minimum de distance. Menons par M un plan normal à l'axe, et qui le coupe au point O. Soit construit alors l'hexagone régulier MM'NN'PP' ayant son centre en O. Chacun de ses sommets sera un Sommet de l'Assemblage, et il en sera de même du centre O. Ce plan étant pris pour plan des xy, son équation sera $z = 0$.

Sur les plans réticulaires $z = 1$, $z = 2, \ldots$, la même démonstration est applicable; l'intersection de chacun de ces plans avec l'axe sera aussi un Sommet. Donc les Réseaux de ces plans coïncident, en projection orthogonale, avec le Réseau du plan $z = 0$. D'ailleurs il est évident que ces Réseaux sont à maille triéquiangle.

Corollaire. — L'axe sénaire est une des Rangées de l'Assemblage, et cette Rangée est conjuguée avec son plan normal.

Théorème LXXI. — *Tout Assemblage à axe de symétrie sénaire dérive d'un prisme droit à base triéquiangle.*

C'est une conséquence du corollaire précédent. Si sur le rhombe OMM'N (*fig.* 11) on élève un prisme droit ayant pour hauteur l'intervalle qui sépare le plan $z = 0$ du plan $z = 1$, ce solide sera le parallélipipède générateur de l'Assemblage, puisque OM et ON sont deux Rangées conjuguées du Réseau du plan OMM'N.

Le prisme droit de même hauteur et de base triangulaire OMM' peut aussi être pris pour solide générateur de l'Assemblage.

Corollaires. — Toutes les Rangées parallèles à l'axe sénaire sont aussi des axes sénaires.

Toute parallèle à l'axe sénaire menée par le centre de l'un des triangles équiangles du Réseau normal à l'axe est un axe intermédiaire, dont la symétrie est ternaire.

Toute parallèle à l'axe sénaire menée par le milieu de l'un des côtés des triangles équiangles du Réseau $z = o$ est aussi un axe intermédiaire, mais de symétrie binaire.

Tous les plans réticulaires normaux à l'axe sénaire sont des plans de symétrie.

Tous les plans réticulaires passant par l'axe sénaire et parallèles aux côtés des triangles du Réseau $z = o$ sont des plans de symétrie; il y a trois systèmes distincts de tels plans.

Tous les plans réticulaires passant par l'axe sénaire et perpendiculaires aux côtés des triangles du Réseau $z = o$ sont aussi des plans de symétrie; il y a trois systèmes distincts de tels plans.

Dans chacun des triangles équiangles du Réseau $z = o$, chaque côté est un axe de symétrie binaire de l'Assemblage; il y a trois systèmes de tels axes, et ces axes sont de même espèce.

Dans ces mêmes triangles, chaque normale à un côté menée par le sommet opposé est aussi un axe de symétrie binaire; il y a trois systèmes de tels axes: ces axes sont de même espèce entre eux, mais d'espèce différente de celle des précédents.

Définitions. — Les axes parallèles aux côtés seront dits axes binaires *de première espèce;* les axes perpendiculaires aux côtés, et dont le paramètre est la grande diagonale du rhombe générateur du Réseau $z = o$, seront dits axes binaires *de deuxième espèce.*

Ces six systèmes d'axes se coupent entre eux sous des angles de 30, 60 et 90 degrés.

Théorème LXXII. — *Si, dans un Assemblage à symétrie simplement ternaire, on supprime, parmi les Réseaux des plans réticulaires normaux à l'axe, ceux qui ont un numéro d'ordre non divisible par* 3, *on obtient un Assemblage à symétrie sénaire: toutes les Rangées et plans réticulaires de l'Assemblage primitif se retrouvent dans le nouvel Assemblage.*

La première partie de la proposition énoncée a déjà été démontrée (théorème LXI, corollaire); la suppression indiquée revient à annuler

deux Sommets sur trois, sur chacune des grandes diagonales des prismes droits générateurs à base rhombe. Or nous avons vu (théorème LIII) que l'intercalation de nouveaux Sommets, ou la suppression des Sommets intercalés, dans un système de Rangées parallèles, n'altère pas les divers systèmes de Rangées ou de plans réticulaires, du moins quant à la direction de ces systèmes.

La suppression des plans à indice non multiple de 3 modifie les systèmes de Rangées, soit en rendant leur densité trois fois moindre, soit en rendant leur paramètre trois fois plus grand. Elle modifie les systèmes de plans réticulaires, soit en triplant l'épaisseur des strates, soit en triplant l'aire de la maille génératrice des Réseaux de ces plans.

Symétrie terquaternaire.

Les énoncés des théorèmes qui vont suivre, et la définition de la page 86, indiqueront ce que l'on doit entendre par la *symétrie terquaternaire*.

Théorème LXXIII. — *Lorsqu'un Assemblage possède deux axes de symétrie ternaire non parallèles, il en possède quatre, disposés comme le sont les quatre grandes diagonales d'un cube, c'est-à-dire se coupant sous l'angle* $70°31'44''$ *dont le cosinus est égal à* $\frac{1}{3}$, *et il ne peut en posséder un plus grand nombre.*

Soient OA et OB (*fig.* 34) les deux axes de symétrie donnés partant d'un même Sommet O, et prolongeons-les jusqu'à la rencontre d'une surface sphérique de centre O et de rayon égal à 1. Menons l'arc de grand cercle AB, et faisons tourner le système OAB de 120 degrés autour de OB, jusqu'à ce qu'il arrive en OCB, puis de 120 degrés autour de OC, etc.; nous arriverons facilement par cette voie à démontrer que les axes ternaires sont assemblés, ou bien comme les quatre diagonales d'un cube, ou bien comme les dix diagonales d'un dodécaèdre régulier; mais si l'on nomme ω (*fig.* 34) le centre du polygone régulier sphérique ABCD... ainsi obtenu, $O\omega$ devra être aussi un axe de symétrie tel, que la restitution des Sommets s'opère après une rotation égale à l'angle $A\omega C$, autour de $O\omega$; or, dans le cas du dodécaèdre régulier, on aurait

$$A\omega C = 144°,$$

angle qui ne peut jamais (*voyez* le corollaire du théorème XLVI) produire la restitution des lieux des Sommets : donc le cas de dix axes ternaires assemblés comme les diagonales d'un dodécaèdre régulier doit être exclu; donc, etc.

Ceux de nos lecteurs qui désireraient une démonstration plus développée de ce théorème, la trouveront dans mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique ». Je me borne à rappeler que j'ai démontré dans ce Mémoire :

1°. Que lorsqu'il existe dans un polyèdre deux axes d'ordre supérieur au deuxième, le polyèdre est *sphéroédrique* (théorème XL de mon Mémoire);

2°. Qu'il existe deux groupes de polyèdres *sphéroédriques*, les *quaterternaires*, ayant quatre axes ternaires assemblés comme le sont les quatre diagonales d'un cube, et les *décemternaires*, ayant dix axes ternaires assemblés comme le sont les dix diagonales d'un dodécaèdre régulier (corollaire du théorème XLIII, même Mémoire);

3°. Que les polyèdres *décemternaires* ont en même temps dix axes quinaires (théorème LII, même Mémoire).

Comme les Assemblages ne peuvent jamais posséder d'axes quinaires, ils ne peuvent, par conséquent, avoir dix axes ternaires.

De là résulte clairement que tout Assemblage qui a deux axes ternaires rentre dans la catégorie des polyèdres *quaterternaires*, et même dans la catégorie spéciale des polyèdres *quaterternaires* à centre de symétrie, puisque chaque Sommet d'un Assemblage peut être pris pour son centre de symétrie. Ainsi le théorème actuel est complétement démontré.

THÉORÈME LXXIV. — *Le plan de jonction de deux axes ternaires non parallèles est un plan de symétrie de l'Assemblage.*

Soient OA (*fig.* 35) l'un de ces axes, et OB le second axe : du Sommet O, et d'un rayon OA égal à 1, décrivez une surface sphérique; menez l'arc de grand cercle AB, et les arcs de grand cercle AC, AD, tels, que l'on ait

$$BAC = 120^\circ, \quad BAD = 120^\circ, \quad AC = AD = AB.$$

Par OA passent trois plans de symétrie (théorème LXIII) qui couperont la sphère suivant trois grands cercles. Si ces plans n'étaient pas dirigés

suivant AB, AC, AD, ils le seraient suivant Ab, Ac, Ad; B, C, D auraient des homologues en B', C', D' : ainsi non-seulement OB, OC, OD seraient des axes ternaires; mais il en serait de même de OB', OC', OD', ce qui est contraire au théorème précédent. Donc OAB, OAC, OAD sont des plans de symétrie; ce sont, de plus, les trois sections principales du rhomboèdre générateur dont l'axe est dirigé suivant OA.

Théorème LXXV. — *Les bissectrices des angles* $70°31'44''$, $109°28'16''$, *que forment entre eux deux axes ternaires, sont des axes de symétrie pour le Réseau du plan réticulaire qui unit ces deux axes.*

La démonstration de ce théorème se déduit facilement des principes exposés dans mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique » : car il en résulte que la bissectrice de l'angle obtus ($109°28'16''$) de deux axes ternaires d'un polyèdre quaterternaire est toujours un axe de symétrie binaire ou quaternaire du polyèdre (théorème XLIV de ce Mémoire); donc cette bissectrice est un axe de symétrie pour les Réseaux de tous les plans réticulaires qui passent par cette droite. La bissectrice de l'angle aigu des deux axes ternaires sera donc aussi un axe de symétrie du Réseau de leur plan (théorème XII).

Problème XXIX. — *Trouver les Assemblages qui possèdent quatre axes de symétrie ternaire.*

Dans un Assemblage quelconque à noyau rhomboédrique, soit OO' (*fig.* 36) l'axe ternaire, de paramètre OO'; O, O' sont deux Sommets, et l'une des trois sections principales est prise pour plan de la figure. Soit AOA'O' cette section principale : si par les Sommets O, A, A', O' on imagine des plans GOH, AmB, A'm'B', G'O'H' normaux à l'axe, ces plans pourront être considérés comme ayant pour équations

$$z=0,\quad z=1,\quad z=2,\quad z=3;$$

ils divisent donc le paramètre de l'axe OO' en trois parties égales.

Maintenant nommons

μ l'angle du rhomboèdre, c'est-à-dire l'angle que forment entre elles deux faces de ce rhomboèdre passant toutes les deux par O, ou toutes les deux par O';

a le paramètre des axes binaires de l'Assemblage, c'est-à-dire la longueur des côtés du triangle équiangle formant la maille du Réseau des plans $z=0$, $z=1,\ldots$;

d le paramètre de l'axe ternaire, c'est-à-dire la longueur OO'.

Il est aisé de voir que l'on a, quel que soit l'angle μ du rhomboèdre,

$$\mathrm{A}m = \mathrm{A}'m' = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,a,$$
$$\mathrm{O}m = mm' = \mathrm{O}'m' = \tfrac{1}{3}\,d;$$

l'angle μ dépend du rapport existant entre les paramètres a et d, et l'on trouve facilement que cette dépendance est exprimée par la formule

$$(62) \qquad \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mu = \frac{a^2}{d^2} + \tfrac{1}{3}.$$

Ces préliminaires, qui s'appliquent à tous les Assemblages ternaires, étant posés, cherchons la condition pour que l'Assemblage possède quatre axes ternaires.

Prenons pour plan de la figure le plan de jonction de OO' avec le deuxième axe ternaire, qui sera OA. On sait : 1° que ce plan sera l'une des trois sections principales du rhomboèdre à axe OO' (théorème LXXIV); 2° que l'on doit avoir

$$\cos m\mathrm{OA} = \tfrac{1}{3} \text{ (théorème LXXIII)},$$

d'où il résulte que l'on a

$$\mathrm{OA} = 3\mathrm{O}m = \mathrm{OO}';$$

3° que la bissectrice OM de l'angle AOO' est un axe de symétrie du Réseau du plan de la figure (théorème LXXV).

D'où l'on voit que, si l'on mène AM parallèle à OO', O'M parallèle à OA, la figure OAMO' sera un rhombe dont les quatre sommets seront des Sommets appartenant au Réseau du plan de la figure, et dont les diagonales OM, AO' seront des axes de symétrie du Réseau (théorème LXXV). Si maintenant on partage OA en trois parties égales On, nn', n'A, les plans normaux à OA, passant par O, n, n', A, viendront couper la bissectrice OM en C, B', N. Comme les Sommets de notre Réseau ne peuvent se rencontrer, d'une part, que sur le système des Rangées G'O'H', A'm'B', BmA, d'autre part,

que sur le système des Rangées APN, n'RB'Q, nCO', ces Sommets ne doivent être cherchés que sur les points d'intersection de ces droites. Mais d'abord il est évident que les quatre points R, P, Q, D' ne peuvent appartenir à l'Assemblage; car, si le point D' était dans ce cas, en le faisant tourner de 120 degrés autour de OO', il viendrait en un lieu de l'espace tel, qu'il aurait u pour projection sur le plan de la figure, et serait situé dans l'intérieur de la strate comprise entre les deux plans menés par O et n normalement à OA, ce qui est évidemment impossible. Donc les points C, B', N peuvent seuls être des Sommets, dans l'intérieur du rhombe OAMO'. Donc le nombre des solutions se réduit à trois, le paramètre de la Rangée OCB'M étant nécessairement égal à OM, ou à OB' $= \frac{1}{2}$ OM, ou à OC $= \frac{1}{4}$ OM.

Première solution. — Le paramètre de la Rangée bissectrice est égal à OM. Le parallélogramme AOA'O' est alors la section principale du rhomboèdre ayant OO' pour axe.

Ce rhomboèdre est complétement déterminé par l'équation

$$\overline{Am}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{Om}^2 = \tfrac{8}{9}\, d^2,$$

d'où l'on tire

$$a^2 = 3\,\overline{Am}^2 = \tfrac{8}{3}\, d^2,$$

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, \mu = 3, \quad \mu = 120^\circ.$$

L'Assemblage dépendant du rhomboèdre de 120 degrés auquel nous sommes ainsi conduits, peut être obtenu en centrant tous les cubes d'un Assemblage à noyau cubique. En effet, le point O peut être considéré comme étant le plus bas Sommet d'un cube dont le centre serait en O' et le Sommet supérieur en O''; le parallélogramme OA'O''M serait sa section principale suivant la diagonale OO''; le Sommet A serait le centre de l'un des six cubes qui se juxtaposent à OA'O''M suivant chacune de ses faces.

Deuxième solution. — Le paramètre de la Rangée bissectrice est égal à OB'. Le rectangle OB'O'B est alors la section principale du rhomboèdre qui a OO' pour axe. L'arête O'B' du rhomboèdre étant normale à la face qui a O'B pour trace, on voit que le rhomboèdre correspondant est un

cube. On déduirait aussi ce résultat des formules

$$a^2 = 3\,\overline{Bm}^2 = \tfrac{3}{4}\,\overline{Am}^2 = \tfrac{2}{3}\,d^2,$$
$$\text{tang}^2\,\tfrac{1}{2}\mu = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} = 1, \quad \mu = 90°.$$

Troisième solution. — Le paramètre de la Rangée bissectrice est égal à OC. Dans ce cas, O, C, B′, N, M sont des Sommets de l'Assemblage. La section principale est OCO′C′. On a, alors,

$$a^2 = 3\,\overline{Cm}^2 = \tfrac{3}{4}\,\overline{Bm}^2 = \tfrac{1}{6}\,d^2,$$
$$\text{tang}^2\,\tfrac{1}{2}\mu = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}, \quad \mu = 70°\,31'44''.$$

D'après la valeur, 70° 31′ 44″, de l'angle dièdre du rhomboèdre générateur, on reconnaît qu'il se termine supérieurement et inférieurement par deux tétraèdres réguliers. On a, d'ailleurs,

$$\overline{OC}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{Cm}^2 = \tfrac{1}{9}\,d^2 + \tfrac{1}{18}\,d^2 = \tfrac{1}{6}\,d^2 = a^2,$$

ce qui prouve bien que les trois faces latérales de ce tétraèdre sont des triangles équilatéraux.

Les Sommets C, C′ occupent les centres de deux des faces du cube à section principale OBO′B′; les quatre Sommets qui se projettent orthogonalement en D et D′, sur le plan de la figure, occupent les centres des quatre autres faces du même cube. Ainsi l'Assemblage actuel peut être considéré comme dérivant d'un cube ayant ses six faces centrées.

En résumé, le cube, le rhomboèdre de 120 degrés (rhomboèdre tangent extérieurement au cube, suivant le langage des cristallographes), et le rhomboèdre de 70° 31′ 44″ (rhomboèdre tangent intérieurement au cube), sont les seuls rhomboèdres qui puissent servir de noyau à un Assemblage possédant quatre axes ternaires.

Théorème LXXVI. — *Les Assemblages qui possèdent quatre axes ternaires possèdent aussi trois axes quaternaires.*

On peut substituer aux trois rhomboèdres que nous venons d'obtenir le cube centré, le cube non centré et le cube à six faces centrées. Or chacun de ces solides possède évidemment trois axes quaternaires; ce sont les lignes

qui joignent deux à deux les centres des faces opposées de ces cubes. Ces axes quaternaires sont rectangulaires entre eux.

Théorème LXXVII. — *Lorsqu'il existe deux axes de symétrie quaternaire, il en existe trois assemblés rectangulairement, et il ne peut en exister un plus grand nombre.*

Ce théorème se démontrerait comme le théorème LXXIII. Les intersections des axes avec la sphère de rayon 1 forment un système de six points répartis de manière à figurer les sommets d'un octaèdre régulier inscrit; donc, etc.

C'est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème XLI de mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique ».

Problème XXX. — *Trouver les Assemblages qui possèdent trois axes quaternaires.*

Le solide générateur de tout Assemblage à un axe quaternaire est un prisme droit à base carrée, centré ou non centré (théorème LXVI). Soit donc OACB (*fig.* 37) la base de ce prisme, O, A, C, B étant des Sommets de l'Assemblage.

Soient a le paramètre des Rangées dirigées suivant les côtés de ce carré,
d le paramètre des Rangées normales à son plan.

Les deux axes quaternaires qui restent disponibles sont nécessairement situés dans le plan OACB (théorème LXXVII); ils sont donc dirigés suivant OA, OB, ou suivant OC, GOE; sans cela, la symétrie binaire que possèdent ces dernières lignes (théorème LXIX, corollaire) doublerait le nombre des axes quaternaires, ce qui serait contraire au théorème LXXVII. De là résultent les trois solutions suivantes :

Première solution. — Si le prisme n'est pas centré, les axes situés dans le plan de la figure ne peuvent être OC et GOE; car une rotation de 90 degrés autour de OC amènerait A dans l'intérieur du prisme indéfini qui a OACB pour base, et qui doit rester vide de tout Sommet dans son intérieur : mais l'on peut prendre OA, OB pour axes quaternaires, et, en faisant tourner OACB de 90 degrés autour de OA, on voit que l'on aura

$$d = a.$$

Ainsi, dans ce cas, le solide générateur est un cube non centré.

Deuxième solution. — Si le prisme est centré, soit D son centre (que l'on n'a point marqué sur la figure), se projetant orthogonalement en d sur le centre du carré OACB.

Si les axes quaternaires disponibles sont alors dirigés suivant OA, OB, une rotation de OACB autour de OA, égale à 90 degrés, fera voir que l'on a, comme précédemment,

$$a = d.$$

Le point D occupera le centre du cube ayant OACB pour base; le solide générateur est alors un cube centré.

Troisième solution. — Enfin, si les axes quaternaires disponibles sont OC et GOE, en effectuant une rotation de 90 degrés autour de OC, on voit que A viendra en D; d'où l'on déduit

$$\mathrm{D}d = \mathrm{A}d = a\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

et, en doublant cette hauteur, on aura la hauteur du prisme générateur, savoir,

$$d = a\sqrt{2}.$$

Mais, si l'on prend alors le carré OCFE pour base, le prisme se change évidemment en un cube centré sur ses six faces.

Corollaire. — Les trois genres d'Assemblages que fournit la solution du problème XXX coïncident avec les trois genres d'Assemblages que fournit la solution du problème XXIX.

Il en résulte que les Assemblages qui possèdent trois axes de symétrie quaternaire possèdent quatre axes de symétrie ternaire, et *vice versâ*.

Théorème LXXVIII. — *Tout Assemblage qui possède en même temps un axe ternaire et un axe quaternaire, possède trois axes quaternaires et quatre axes ternaires.*

Les trois axes quaternaires sont une conséquence de la symétrie propre à l'axe ternaire donné; l'Assemblage possède donc aussi quatre axes ternaires (corollaire précédent).

Définition. — Nous nommerons dorénavant Assemblages *terquaternaires* les trois genres d'Assemblages dont nous venons de constater l'existence, et

qui possèdent en même temps trois axes quaternaires et quatre axes ternaires. La symétrie qui caractérise ces Assemblages sera dite *symétrie terquaternaire*. La présence simultanée de deux de ces sept axes suffit pour constater la symétrie terquaternaire.

Théorème LXXIX. — *Tout Assemblage terquaternaire possède six axes binaires qui bissèquent les angles droits que forment les axes quaternaires combinés deux à deux.*

Soient $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ (*fig.* 42) trois axes quaternaires se coupant au Sommet O; la symétrie de l'axe quaternaire Oz exige que les deux bissectrices des angles xOy, $x'Oy$ soient des axes binaires (théorème LXIX, corollaire). Il en serait de même pour les quatre autres bissectrices.

Théorème LXXX. — *Tout Assemblage terquaternaire possède trois plans de symétrie joignant deux à deux les axes quaternaires, et six autres plans de symétrie joignant deux à deux les axes ternaires, mais d'autre espèce que les trois précédents.*

La présence des trois axes quaternaires exige que les plans réticulaires normaux à ces axes soient des plans de symétrie de l'Assemblage (théorème LII). Les six axes binaires nécessitent de même six plans de symétrie qui leur soient normaux; du reste, on a déjà vu (théorème LXXIV) que le plan de jonction de deux axes ternaires était un plan de symétrie : un tel plan est évidemment normal à l'un des six axes binaires du système.

Scolie. — Pour se figurer la position mutuelle de ces axes et plans, on peut considérer un cube dont le centre coïncide avec leur point de concours. Les quatre diagonales du cube sont les axes ternaires; les trois droites, joignant deux à deux les centres des faces opposées, sont les axes quaternaires; les six droites, joignant deux à deux les milieux des arêtes opposées, sont les axes binaires; les plans menés par le centre parallèlement aux faces sont les trois plans de symétrie *de première espèce;* les plans menés par deux arêtes opposées sont les six plans de symétrie *de seconde espèce*.

On peut également diviser la surface de la sphère en huit triangles trirectangles, au moyen de trois grands cercles: les sommets Q, Q′, Q″,..., de ces triangles sont alors des extrémités d'axes quaternaires; les centres

T, T′, T″,..., de ces mêmes triangles sont des extrémités d'axes ternaires, et les milieux B, B′, B″,..., de leurs côtés sont des extrémités d'axes binaires.

On a, en se bornant à considérer les plus petits des angles formés par ces axes, et en nommant O le centre de la sphère, les relations angulaires suivantes :

$$\text{QOQ}' = 90^\circ, \qquad \text{QOT} = 54^\circ 44' 8'',$$
$$\text{TOT}' = 70^\circ 31' 44'', \quad \text{QOB} = 45^\circ,$$
$$\text{BOB}' = 60^\circ, \qquad \text{TOB} = 35^\circ 15' 52''.$$

Théorème LXXXI. — *S'il existe dans un Assemblage un axe de symétrie sénaire, il ne peut y exister aucun autre axe que des axes binaires situés dans le plan normal à cet axe.*

Et d'abord il ne peut exister simultanément deux axes sénaires, puisqu'il n'existe aucun polyèdre régulier dont les angles plans s'assemblent six par six à chaque sommet (*voyez* les démonstrations des théorèmes LXXIII et LXXVII, ou mieux encore le théorème XLI de mon « Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique »).

S'il existait dans l'Assemblage un axe ternaire ou quaternaire, ou même un axe binaire oblique à l'axe sénaire, la symétrie propre à cet axe forcerait l'axe sénaire à se répéter, et il y aurait au moins deux axes sénaires dans l'Assemblage, ce qui n'est pas possible, d'après la remarque précédente.

Classification des Assemblages symétriques.

Au point de vue de leur symétrie, on peut distinguer sept classes d'Assemblages que je désigne de la manière suivante :

Première classe. — Assemblages terquaternaires. Trois axes quaternaires, quatre axes ternaires et six axes binaires, disposés comme le sont les lignes joignant deux à deux, dans un cube, les centres des faces opposées, les sommets opposés et les milieux des arêtes opposées. Trois plans de symétrie normaux aux axes quaternaires; six plans de symétrie normaux aux axes binaires.

Trois modes d'arrangement distincts :

1°. Le cube;

2°. Le cube centré, que l'on peut remplacer par le rhomboèdre de 120 degrés;

3°. Le cube à faces centrées, que l'on peut remplacer par le rhomboèdre de 70°31'44", ou par le prisme centré, à base carrée, dont la hauteur égale le côté de la base multiplié par $\sqrt{2}$. Le tétraèdre régulier et l'octaèdre régulier peuvent aussi servir à la dérivation de ce troisième mode.

Deuxième classe. — Assemblages sénaires. Un axe sénaire normal à un plan réticulaire dont le Réseau est à maille triéquiangle; trois axes binaires de première espèce, parallèles aux côtés du triangle principal; trois axes binaires de deuxième espèce, parallèles aux hauteurs.

Un plan de symétrie normal à l'axe sénaire; trois plans de symétrie de même espèce, normaux aux axes binaires de la première espèce; trois plans de symétrie d'une autre espèce, normaux aux axes binaires de la deuxième espèce.

Un seul mode d'arrangement, indiqué par les six sommets d'un prisme droit à base triéquiangle. Le parallélipipède générateur est un prisme droit dont la base est un rhombe de 60 et 120 degrés.

Troisième classe. — Assemblages quaternaires. Un axe quaternaire normal à un plan réticulaire dont le Réseau est à maille carrée; deux axes binaires de première espèce, parallèles aux côtés de ce carré; deux axes binaires de deuxième espèce, parallèles aux diagonales.

Un plan de symétrie normal à l'axe quaternaire; deux plans de symétrie de même espèce, normaux aux axes binaires de la première espèce; deux plans de symétrie d'une autre espèce, normaux aux axes binaires de la deuxième espèce.

Deux modes distincts d'arrangement :

1°. Le prisme droit à base carrée;

2°. Le prisme droit à base carrée, centré; on peut lui substituer un octaèdre droit à base carrée.

Quatrième classe. — Assemblages ternaires. Un axe ternaire normal à un plan réticulaire dont le Réseau est à maille triéquiangle; trois axes binaires de même espèce, parallèles aux côtés du triangle principal.

Trois plans de symétrie passant par l'axe ternaire et perpendiculaires aux axes binaires.

Un seul mode d'arrangement indiqué par les huit sommets d'un rhomboèdre.

Cinquième classe. — Assemblages terbinaires. Trois axes de symétrie binaire, rectangulaires entre eux, tous les trois d'espèces différentes; trois plans de symétrie joignant ces axes deux à deux.

Quatre modes distincts d'arrangement :

1°. Le prisme droit à base rectangle;

2°. Le prisme droit à base rectangle, centré; on peut lui substituer l'octaèdre droit à base rectangle;

3°. Le prisme droit à base rhombe; on peut lui substituer un prisme droit à base rectangle, centré sur ses deux bases, ou sur deux de ses faces latérales, parallèles et opposées l'une à l'autre;

4°. Le prisme droit à base rhombe, centré; on peut lui substituer l'octaèdre droit à base rhombe, dont les trois sections principales sont des rhombes.

Sixième classe. — Assemblages binaires. Un seul axe de symétrie binaire; un seul plan de symétrie normal à l'axe, et dont le Réseau a pour triangle principal un triangle acutangle quelconque.

Deux modes distincts d'arrangement.

1°. Le prisme droit à base parallélogrammique, non centré;

2°. Le prisme droit à base parallélogrammique, centré; on peut lui substituer le prisme droit à base parallélogrammique, ayant deux de ses faces latérales centrées.

Septième classe. — Assemblages asymétriques. Aucun axe, aucun plan de symétrie.

Un seul mode d'arrangement :

Le prisme oblique à base parallélogrammique.

Le tableau suivant indique le nombre des axes de symétrie dans les diverses classes d'Assemblages :

ASSEMBLAGES.	NOMBRE DES AXES				NOMBRE total des axes.
	senaires.	quaternaires.	ternaires.	binaires.	
Torquaternaires	0	3	4	6	13
Senaires	1	0	0	6	7
Quaternaires	0	1	0	4	5
Ternaires	0	0	1	3	4
Terbinaires	0	0	0	3	3
Binaires	0	0	0	1	1
Asymétriques	0	0	0	0	0

On voit, d'après ce tableau, que le nombre total des axes suffit pour définir complétement chacune de ces classes, puisqu'il est nécessairement l'un des sept nombres 13, 7, 5, 4, 3, 1, 0; le premier de ces nombres exprime le plus haut degré de symétrie qui puisse se présenter dans un Assemblage.

Relativement à l'espèce des axes, on remarquera :

1°. Que les axes quaternaires sont toujours de même espèce ;

2°. Qu'il en est de même des axes ternaires;

3°. Mais que cela n'est pas toujours ainsi pour les axes binaires.

Nous nommons axes binaires *de première espèce,* ceux de plus petit paramètre; axes binaires *de deuxième espèce,* ceux dont le paramètre est plus grand que celui des axes de la première espèce, mais moindre que celui des axes de troisième espèce, si ces derniers axes se rencontrent dans l'Assemblage; axes binaires *de troisième espèce,* ceux à paramètre maximum.

Le tableau suivant offre la distribution des axes binaires par espèces, pour chacune de nos six premières classes. J'y ai ajouté le nombre des plans de symétrie qui caractérisent la classe; chacun d'eux correspond à un axe binaire, quaternaire ou sénaire qui lui est normal.

Relativement aux plans de symétrie de même espèce ou d'espèces différentes, on se guidera sur la règle suivante : « A des axes d'ordre pair et de » même espèce correspondent toujours des plans de symétrie de même » espèce; réciproquement, si les axes sont d'espèces différentes, les plans de » symétrie qui leur sont normaux sont aussi d'espèces différentes. »

Le nombre total des plans de symétrie est toujours égal au nombre total des axes d'ordre pair qui existent dans l'Assemblage.

Le nombre maximum de ces plans de symétrie est donc égal à 9.

ASSEMBLAGES.	AXES BINAIRES DE			NOMBRE TOTAL des plans de symétrie.
	première espèce.	deuxième espèce.	troisième espèce.	
Terquaternaires....	6	0	0	9
Senaires..........	3	3	0	7
Quaternaires	2	2	0	5
Ternaires.........	3	0	0	3
Terbinaires.......	1	1	1	3
Binaires....	1	0	0	1

Dans la deuxième classe (Assemblages sénaires), le paramètre des axes binaires de première espèce étant 1, celui des axes de deuxième espèce est toujours égal à $\sqrt{3}$.

Dans la troisième classe (Assemblages quaternaires), le paramètre des axes binaires de première espèce étant 1, celui des axes de deuxième espèce est toujours égal à $\sqrt{2}$.

Dans la cinquième classe (Assemblages terbinaires), les rapports sont indéterminés.

Notations symboliques de la symétrie des Assemblages.

Si, par l'un des Sommets d'un Assemblage, on fait passer tous les axes et plans de symétrie qui lui sont propres, on pourra considérer l'Assemblage comme un polyèdre dont le centre est au Sommet que l'on a choisi.

On nomme *centre de symétrie* dans un polyèdre un point central ainsi situé, qu'en le joignant à un sommet quelconque du polyèdre, et prolongeant la droite de jonction, au delà de ce centre, d'une quantité égale à elle-même, le point ainsi obtenu soit aussi un sommet du polyèdre, lequel sera dit l'*homologue* du sommet primitif, par rapport à ce centre de symétrie.

Tous les polyèdres ne sont point pourvus d'un tel centre de symétrie; lorsqu'il existe, sa présence y introduit un élément particulier de symétrie dont il est important de tenir compte.

Dans un Assemblage quelconque, tous les Sommets sont évidemment des

centres de symétrie; cette multiplicité de centres est en rapport avec la multiplicité que l'on observe dans le système des axes de symétrie parallèles à un axe donné.

On peut appliquer aux Assemblages les mêmes notations symboliques qui m'ont servi à représenter la symétrie des polyèdres ordinaires (Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique, *Journal de Mathématiques,* tome XIV).

Dans les symboles que j'ai adoptés, la lettre C indique un polyèdre pourvu d'un centre de symétrie; ce symbole devra évidemment se présenter dans toutes les expressions de la symétrie des Assemblages.

Les lettres A, L, L' désignent des axes de symétrie; A^2, L^2, L'^2, des axes binaires; A^3, L^3,..., des axes ternaires, et ainsi de suite, l'indice supérieur indiquant le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe.

La lettre A s'applique toujours à l'axe principal, seul de son espèce.

Le nombre des axes de même espèce est indiqué par le coefficient qui précède la lettre symbole de ces axes; ainsi la notation (A^6, $3L^2$, $3L'^2$) indique un axe principal sénaire combiné avec trois axes binaires d'une certaine espèce, et avec trois autres axes binaires d'une autre espèce.

Les plans de symétrie sont désignés par les lettres Π, P, P'; on affectera la lettre Π au plan de symétrie normal à l'axe principal A; les symboles P^q, P'^q, $P^{q'}$, aux plans de symétrie normaux aux axes L^q, L'^q, $L^{q'}$; le nombre de ces plans sera placé, sous forme de coefficient, en avant de la lettre P: ainsi (Π, $3P^2$, $3P'^2$) signifiera un plan de symétrie normal à l'axe principal, trois plans de symétrie de même espèce normaux aux axes $3L^2$, et trois plans de symétrie d'une autre espèce normaux aux axes $3L'^2$.

Ceci posé, les symboles de nos sept classes d'Assemblages seront les suivants :

ASSEMBLAGES.	SYMBOLE DE LEUR SYMÉTRIE.
Terquaternaires....	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$.
Sénaires..........	A^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, Π, $3P^2$, $3P'^2$.
Quaternaires.......	A^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, Π, $2P^2$, $2P'^2$.
Ternaires..........	A^3, $3L^2$, C, $3P^2$.
Terbinaires........	A^2, L^2, L'^2, C, Π, P^2, P'^2.
Binaires............	A, C, Π.
Asymétriques.......	oL, C, oP.

Il importe de remarquer qu'ici les lettres C, A, L, Π, P,..., représentent non pas un seul point, ou une seule ligne, ou un seul plan, comme cela a lieu dans les polyèdres à nombre limité de sommets, mais bien un système de points, ou un système d'axes tous parallèles, ou un système de plans pareillement tous parallèles entre eux.

Il faut ajouter encore qu'il existe dans les Assemblages des centres de symétrie qui ne coïncident pas avec les Sommets de l'Assemblage; ces centres de symétrie sont les analogues des axes intermédiaires et des plans de symétrie intermédiaires dont nous avons parlé, pages 60 et 62. Ainsi, dans la classe asymétrique, il existe huit systèmes distincts de centres de symétrie de l'Assemblage, savoir : 1° les Sommets de l'Assemblage; 2° les centres des parallélipipèdes générateurs ; 3° les centres des faces de ces parallélipipèdes, centres qui se groupent en trois catégories distinctes; 4° les milieux des arêtes, qui constituent aussi trois systèmes distincts de centres. On peut consulter, à ce sujet, le Mémoire de M. Philippe Breton (*Journal de Mathématiques* de M. Liouville, tome X, page 430).

Il est entendu que nous nous bornons à considérer les centres qui coïncident avec des Sommets, de même que, parmi les axes de symétrie, nous n'avons tenu compte que de ceux qui passaient par des Sommets.

Des différents modes d'arrangement des Sommets dans la même classe d'Assemblages.

On a déjà pu remarquer que, dans une même classe d'Assemblages, venaient se grouper des Assemblages à modes d'agencement des Sommets complétement distincts, quoique les axes et plans de symétrie fussent les mêmes de part et d'autre. Je les nommerai les divers *modes* de la classe. M. Frankenheim, qui a été conduit, dans ses belles recherches sur la cristallographie (*), à une subdivision du même genre, a désigné ces modes sous le nom d'*ordres;* mais le terme « modes » me paraît ici préférable, comme exprimant le fait géométrique auquel ils correspondent. Par la même raison, je rejette la désignation de *types* sous laquelle je les avais d'abord décrits, dans une communication faite à la Société Philomathique le 17 mars 1849.

(*) *Acta Naturæ curiosorum*, t. XIX, 2e partie, p. 483.

Deux Assemblages de la même classe appartiennent à des modes distincts de symétrie, lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les espacements des Sommets de l'un des Assemblages, *sans qu'il perde un seul instant ses axes de symétrie,* on ne peut, malgré cela, le rendre que partiellement superposable avec l'autre Assemblage. Tels sont, par exemple, l'Assemblage dérivant du cube, et celui dérivant du cube centré. En faisant varier dans ce dernier le côté du cube, on peut faire coïncider la moitié de ses Sommets avec ceux du premier Assemblage; mais l'autre moitié, qui occupe les centres de figure des cubes, reste en dehors de la superposition.

Deux Assemblages appartiendront au même mode, lorsqu'une variation continue de leurs paramètres pourra les rendre coïncidents.

Lorsque les trois axes dont on fait varier les paramètres sont des Rangées conjuguées de chacun des deux Assemblages, ceux-ci appartiennent toujours au même mode d'arrangement; car la superposition de Rangées conjuguées homologues, Sommets à Sommets, entraîne avec elle celle des Assemblages.

Tous les modes distincts d'une même classe peuvent toujours dériver de l'un des modes de la classe, par l'addition de nouveaux Sommets, soit au centre de figure du solide générateur, soit sur les centres de ses faces; nous disons alors qu'on *centre* ce solide en son centre de figure, ou sur ses faces.

Je vais ajouter quelques nouveaux détails à ce qui a été déjà dit sur la division en modes de nos classes, ou *systèmes.*

Système terquaternaire. Il comprend trois modes distincts :

1°. Le mode hexaédral : le solide générateur est un cube portant une molécule à chacun de ses sommets (*voyez* la remarque de la page 3, ligne 24);

2°. Le mode octaédral : le solide dont il dérive est un octaèdre régulier portant une molécule à chacun de ses sommets; on peut le remplacer par un tétraèdre régulier, qui en est une forme équivalente, ou bien encore par le rhomboèdre de 70° 31′44″. Ce mode dérive du cube par le centrage des six faces de ce solide; alors le nouveau cube (cube à faces centrées), outre les molécules de ses sommets, en porte une au centre de chacune de ses faces. La symétrie du solide ainsi obtenu est plus immédiatement évidente que celle de toutes ses autres formes équivalentes;

3°. Le mode dodécaédral : le solide dont il dérive est un dodécaèdre

rhomboïdal portant une molécule en chacun de ses quatorze sommets et de plus une molécule centrale.

On peut le faire dériver du cube, par l'addition d'une molécule dans le centre de figure du solide. Si l'on joint par des droites les huit sommets d'un tel cube avec les six centres des cubes voisins, apposés sur chacune de ses six faces, on retombe sur le dodécaèdre rhomboïdal centré.

On peut aussi prendre pour solide générateur le rhomboèdre de 120 degrés; mais la symétrie de l'Assemblage est alors moins évidente que dans le cas où l'on considère le cube centré.

Système sénaire. — Un seul mode (*voyez* page 89).

Système quaternaire. — Il comprend deux modes distincts :

1°. Le mode hexaédral, dont le solide générateur est un prisme droit à base carrée;

2°. Le mode octaédral, qui dérive d'un octaèdre droit à base carrée. On obtient cet octaèdre en centrant le prisme droit à base carrée, joignant ce centre avec les quatre sommets de la base, et ceux-ci avec le centre du prisme sous-jacent.

Système ternaire. — Un seul mode (*voyez* page 89).

Système terbinaire. — Quatre modes distincts :

1°. Le mode hexaédral rectangle : le solide générateur est un prisme droit à base rectangulaire, portant des molécules en chacun de ses huit sommets; les Réseaux des trois plans de symétrie du système ont alors des mailles rectangulaires;

2°. Le mode hexaédral rhombique : le solide générateur est un prisme droit à base rhombe. Ce mode dérive du précédent, au moyen du centrage de deux faces opposées, par exemple des deux bases du prisme générateur. On sait, en effet, qu'en centrant les mailles d'un Réseau rectangulaire, celui-ci se change en un Réseau à maille rhombe. Dans ce cas, les Réseaux des deux plans de symétrie verticaux sont à maille rectangulaire; mais la maille est rhombe sur le troisième plan : l'axe normal à ce dernier plan peut être, suivant les cas, de première, de deuxième ou de troisième espèce;

3°. Le mode octaédral rectangle: le solide dont il dérive est un octaèdre droit à base rectangle. On pourra le faire dériver du prisme droit de même base et de même hauteur, en centrant ce dernier en son centre de figure, et

joignant ce nouveau Sommet aux quatre Sommets du rectangle de la base, ceux-ci avec le centre du prisme sous-jacent. Les Réseaux des trois plans de symétrie ont alors des mailles rectangles;

4°. Le mode octaédral rhombique, fourni par l'octaèdre droit à base rhombe. On le fera dériver du prisme hexaédral rectangle, en centrant les six faces de ce dernier prisme : ces six nouveaux Sommets, joints deux à deux, donneront l'octaèdre droit à base rhombe. Les Réseaux des trois plans de symétrie seront alors à maille rhombe.

On voit que ces quatre modes correspondent au prisme droit non centré, au prisme droit centré sur ses deux bases, au prisme droit centré en son centre de figure, et au prisme droit centré sur ses six faces.

Système binaire. — Ce système n'offre que deux modes distincts :

1°. Le mode hexaédral, dont le solide générateur est un prisme droit à base parallélogrammique;

2°. Le mode octaédral, qui dérive du précédent en centrant les prismes de ce dernier en leur centre de figure, ou bien encore en centrant deux de leurs quatre faces verticales. Ces deux genres de dérivation correspondent à un seul et même mode (*) (théorème LV, scolie I).

Si, après le centrage de deux faces verticales, on fait tourner le prisme de 90 degrés, en rendant verticales les arêtes suivant lesquelles se coupent les quatre faces non centrées, on obtient pour solide générateur un prisme à base rhombe, non horizontale, qui est le prisme rhomboïdal oblique des minéralogistes.

Système asymétrique. — Ce système n'offre qu'un seul mode.

(*) M. Frankenheim (*Acta Nat. curiosorum*, t. XIX, 2e partie, p. 570) admet dans les Assemblages binaires (système du prisme oblique d'Haüy) trois modes distincts :

1°. Le prisme droit à base parallélogrammique;

2°. Le prisme oblique à base rhombe;

3°. L'octaèdre droit à base parallélogrammique.

Il est facile de voir que les modes 2° et 3° forment double emploi, et correspondent seulement à des positions différentes de l'axe binaire, qui est horizontal et transverse dans le prisme oblique à base rhombe d'Haüy, tandis qu'il est vertical dans l'octaèdre droit à base parallélogrammique.

Les divisions rationnelles du mode octaédral dépendent de la manière dont le Sommet, centre du prisme, se projette sur sa base, relativement aux trois côtés du triangle principal du Réseau.

Outre la communauté de position des axes et plans de symétrie, les divers modes d'un même système sont reliés entre eux par la propriété énoncée dans le théorème suivant :

Théorème LXXXII. — *Tous les Assemblages appartenant aux divers modes d'une même classe, et qui dérivent les uns des autres par des centrages convenablement faits, offrent les mêmes systèmes de Rangées, et les mêmes systèmes de plans réticulaires.*

En effet, lorsqu'on centre des parallélipipèdes générateurs, cela revient à ajouter un Sommet sur le milieu de l'une des diagonales du parallélipipède, d'ailleurs arbitrairement choisie ; or cette intercalation, en vertu du théorème LIII, n'altère pas les systèmes de Rangées et plans réticulaires de l'Assemblage, du moins quant à leur direction absolue.

Lorsqu'on centre deux faces opposées du parallélipipède générateur, cela revient à ajouter un Sommet sur le milieu de l'une des deux diagonales de la face, c'est-à-dire à doubler le nombre des Sommets du système des Rangées correspondantes ; les systèmes de Rangées et plans réticulaires restent encore les mêmes, quant à leur direction. Donc, etc.

Scolie. — Le même théorème s'applique aussi aux Assemblages sénaire et ternaire qui ont le même axe principal et le même Réseau sur le plan normal à cet axe. On peut même remarquer que la coexistence des mêmes systèmes de Rangées et plans réticulaires s'applique à la fois à l'Assemblage sénaire et aux deux Assemblages ternaires *direct* et *inverse* qui en dérivent par l'intercalation de deux nouveaux Sommets sur chaque paramètre des Rangées diagonales du prisme générateur à base rhombe (théorème LXI, corollaire).

Des plans réticulaires de même espèce et des Rangées de même espèce dans les Assemblages symétriques.

Définition. — Deux plans réticulaires sont *de même espèce* dans un Assemblage, lorsque la configuration des Sommets relativement à l'un de ces plans est la même que la configuration des Sommets relativement à l'autre. Pour constater cette similitude de configuration, on lie par la pensée les Sommets de l'Assemblage à chacun des deux plans, et l'un des deux systèmes est supposé mobile. Alors, si l'on peut faire coïncider en même

temps le plan mobile avec le plan fixe, les Sommets mobiles avec les Sommets fixes, les plans réticulaires seront de même espèce.

Pour que deux plans réticulaires soient de même espèce, il faut que leurs Réseaux soient superposables; mais cette condition n'est pas toujours suffisante. Il faut, en outre, que la superposition des Réseaux entraîne celle des Sommets extérieurs aux plans.

J'ai fait voir (Journal de M. Liouville, tome XIV, page 137) : 1° qu'on obtenait le polyèdre inverse d'un polyèdre donné, en prenant un point arbitrairement, joignant ce point, ou pôle de symétrie, avec les sommets du polyèdre donné et prolongeant ces droites en arrière de quantités égales à elles-mêmes; 2° qu'au moyen du polyèdre inverse, tournant de 180 degrés autour d'une droite quelconque menée par le pôle, on obtenait un polyèdre symétrique du polyèdre donné (dans le sens géométrique de ce terme) par rapport à un plan de symétrie normal à la droite.

L'Assemblage inverse d'un Assemblage donné est toujours susceptible de coïncider avec l'Assemblage primitif : il suffit de prendre pour pôle de symétrie l'un des Sommets. Il en résulte qu'il en est de même d'un Assemblage et de l'un de ses symétriques (dans le sens géométrique du mot), ou, en d'autres termes, que deux Assemblages, symétriques par rapport à un plan de symétrie quelconque, peuvent toujours être amenés à coïncidence.

Théorème LXXXIII. — *Si, en faisant coïncider le Réseau du plan réticulaire* M *de l'Assemblage mobile avec le Réseau du plan réticulaire* F *de l'Assemblage fixe, les deux Assemblages, au lieu de coïncider, devenaient symétriques l'un de l'autre (dans le sens géométrique) par rapport au plan des deux Réseaux coïncidents, les deux plans réticulaires seraient de même espèce.*

En effet, si l'on fait alors tourner, de 180 degrés, l'Assemblage mobile autour d'une droite passant par l'un des Sommets des Réseaux coïncidents et normale au plan de ces Réseaux, on amènera l'Assemblage mobile en coïncidence avec l'inverse de l'Assemblage fixe (*), c'est-à-dire avec l'Assemblage fixe lui-même.

(*) Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie, théorème IV (*Journal de Mathématiques*, tome XIV, page 139).

THÉORÈME LXXXIV. — *Dans tout Assemblage possédant un plan de symétrie, deux plans réticulaires, symétriques (dans le sens géométrique) par rapport à ce plan, sont de même espèce.*

En faisant tourner l'un de ces deux plans, considéré comme faisant partie de l'Assemblage mobile, autour de la droite, intersection de ces plans, on amènera leurs Réseaux en coïncidence, et l'Assemblage mobile deviendra symétrique (dans le sens géométrique) de l'Assemblage fixe par rapport au plan des Réseaux superposés; donc, en vertu du théorème précédent, ces plans seront de même espèce.

On peut aussi établir directement que les deux plans donnés sont de même espèce, en les faisant passer tous les deux par un Sommet pris arbitrairement S, et menant par S une normale au plan de symétrie. Cette normale sera un axe d'ordre pair (théorème LII); si donc on fait tourner l'Assemblage mobile d'un angle égal à q fois l'angle $\frac{360^\circ}{2q}$, $2q$ étant le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe, il y aura restitution des lieux des Sommets, et il est facile de voir que les deux plans réticulaires donnés viendront à superposition, Sommet sur Sommet.

THÉORÈME LXXXV. — *Deux plans réticulaires parallèles sont de même espèce.*

Il suffit de transporter le Réseau mobile parallèlement à lui-même pour obtenir la coïncidence des Sommets.

THÉORÈME LXXXVI. — *S'il existe dans un Assemblage deux plans réticulaires de même espèce, mais non parallèles, cet Assemblage possède au moins un axe de symétrie.*

Les deux plans réticulaires, que je nommerai F et M, peuvent toujours être considérés comme ayant un Sommet commun S qui ne participe pas aux mouvements de l'Assemblage mobile. Supposons que des rotations convenables de cet Assemblage aient fini par amener le Réseau mobile M sur le Réseau fixe F. La coïncidence pourra toujours (d'après la théorie bien connue de la composition des rotations en mécanique) être considérée comme produite par une seule rotation de l'Assemblage mobile autour d'un axe de rotation passant par le Sommet S. Il importe de remarquer que cette droite, ainsi que l'angle de rotation unique qui amène M en coïnci-

dence avec F, se trouvent complétement déterminés, à la condition cependant que l'angle de rotation ne surpasse pas 180 degrés. Cette droite, jouissant ainsi de la propriété de produire, après rotation convenable, la restitution des lieux des Sommets, sera un axe de symétrie de l'Assemblage.

Corollaire. — Il ne peut y avoir de plans réticulaires de même espèce, et non parallèles, dans les Assemblages asymétriques.

Définition. — Deux plans réticulaires de même espèce et non parallèles, sont dits *homologues* par rapport à un axe de symétrie de l'Assemblage, lorsque la rotation *unique* qui amène leurs Réseaux en coïncidence, l'Assemblage mobile se superposant à l'Assemblage fixe, a lieu autour de cet axe; l'on déduit de là le théorème suivant :

Théorème LXXXVII. — *Deux plans réticulaires de même espèce, non parallèles, sont toujours homologues par rapport à un axe de symétrie.*

Corollaire. — On obtient tous les systèmes de plans réticulaires qui sont de la même espèce qu'un plan réticulaire donné, en cherchant les homologues de ce plan par rapport à tous les axes de symétrie de l'Assemblage.

Théorème LXXXVIII. — *Le nombre des plans réticulaires de même espèce, homologues par rapport à un axe de symétrie d'ordre* q, *est égal à* q, *si ces plans réticulaires n'offrent aucune particularité de position par rapport à l'axe, c'est-à-dire si ces plans ne sont ni normaux ni parallèles à cet axe.*

En faisant tourner le plan de $\frac{360^\circ}{q}$, $2\frac{360^\circ}{q}$, ..., $(q-1)\frac{360^\circ}{q}$, on obtiendra ses $q-1$ homologues; il est évident que leur nombre total est égal à q: ces plans sont tous distincts les uns des autres, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être parallèles entre eux.

Théorème LXXXIX. — *Le nombre des plans réticulaires de même espèce, homologues par rapport à un axe d'ordre* q, *et parallèles à cet axe, est égal à* q, *si* q *est impair, et à* $\frac{1}{2}$q, *si* q *est pair.*

Le nombre total des plans est encore ici égal à q; mais, dans le cas particulier où q serait un nombre pair, les plans deviennent parallèles, deux à deux; le nombre total des plans de direction distincte se réduit donc alors à $\frac{1}{2}q$.

Théorème XC. — *Le nombre des plans de même espèce, homologues par rapport à l'axe d'ordre* q, *se réduit à l'unité, dans le cas où le plan primitivement donné est normal à l'axe.*

Cette proposition est évidente.

Au moyen de ces principes, on résoudra facilement la question de la détermination des plans réticulaires de même espèce, quant à leur nombre, et quant à leur situation relative, pour un Assemblage donné, soit dans le cas où ces plans n'offriraient aucune particularité de position relativement aux axes de symétrie, soit dans le cas où ils seraient parallèles ou normaux à un certain nombre de ces axes. Cette question est d'une grande importance en cristallographie.

On peut établir pour les Rangées de même espèce des théorèmes tout à fait semblables à ceux qui se rapportent aux plans réticulaires de même espèce.

Définitions. — La définition des Rangées *de même espèce* est la même que celle des axes ou plans réticulaires de même espèce; celle des Rangées *homologues* est pareille à celle des plans réticulaires homologues.

Théorème XCI. — *Si, en faisant coïncider le paramètre de la Rangée* M *de l'Assemblage mobile avec celui de la Rangée* F *de l'Assemblage fixe, les deux Assemblages, au lieu de coïncider, devenaient symétriques l'un de l'autre (dans le sens géométrique de ce terme) par rapport à un plan passant par la Rangée* F, *les deux Rangées seraient de même espèce.*

Car, si l'on fait alors tourner l'Assemblage mobile, de 180 degrés, autour d'une droite passant par l'un des Sommets de la Rangée F et normale au plan de symétrie, on amènera l'Assemblage mobile en coïncidence avec l'inverse de l'Assemblage fixe, c'est-à-dire avec l'Assemblage fixe lui-même.

Théorème XCII. — *Dans tout Assemblage possédant un plan de symétrie, deux Rangées, symétriques (dans le sens géométrique) par rapport à ce plan, sont de même espèce.*

Théorème XCIII. — *Deux Rangées parallèles sont de même espèce.*

Théorème XCIV. — *S'il existe dans un Assemblage deux Rangées de même espèce, non parallèles, cet Assemblage possède au moins un axe de symétrie.*

THÉORÈME XCV. — *Deux Rangées de même espèce, non parallèles, sont toujours homologues par rapport à un axe de symétrie.*

Corollaire. — On obtient tous les systèmes de Rangées de même espèce que celle d'une Rangée donnée, en cherchant les homologues de celle-ci par rapport à tous les axes de symétrie de l'Assemblage.

THÉORÈME XCVI. — *Le nombre des Rangées de même espèce, homologues par rapport à un axe d'ordre* q, *est égal à* q, *si ces Rangées ne sont ni parallèles ni normales à cet axe.*

THÉORÈME XCVII. — *Le nombre des Rangées de même espèce, homologues par rapport à un axe d'ordre* q *et normales à cet axe, est égal à* q, *si* q *est impair, et à* $\frac{1}{2}$ q, *si* q *est pair.*

THÉORÈME XCVIII. — *Le nombre des Rangées, homologues par rapport à l'axe d'ordre* q, *se réduit à l'unité, dans le cas du parallélisme de la Rangée avec l'axe.*

Ces théorèmes se démontreraient exactement comme les théorèmes LXXXIV à XC : ils sont, du reste, une conséquence nécessaire de la réciprocité qui existe entre les Rangées et les plans réticulaires dans les Assemblages dits « Assemblages polaires l'un de l'autre, » réciprocité dont il sera question dans le paragraphe suivant.

THÉORÈME XCIX. — *Des axes de symétrie de même espèce sont en même temps des Rangées de même espèce.*

Ce théorème est la conséquence des définitions des axes de même espèce (page 58) et des Rangées de même espèce (page 102).

§ VI. — DES ASSEMBLAGES POLAIRES.

Définitions, notations. — Un Assemblage étant donné, menons par l'un de ses Sommets, pris arbitrairement pour origine, des normales à trois plans conjugués de cet Assemblage, et sur chacune de ces trois normales, portons des longueurs égales aux aires des parallélogrammes élémentaires des Réseaux tracés sur chacun de ces plans, divisées par l'*intervalle moyen des Sommets*. Si, avec ces trois nouveaux axes, et ces longueurs pour paramètres, on

construit un Assemblage, il sera dit l'*Assemblage polaire du primitif*, et jouira de propriétés importantes, que nous allons faire connaître.

Le symbole *ghk* représentant une Rangée allant de l'origine au Sommet dont les coordonnées numériques sont g, h, k dans l'Assemblage primitif, le symbole $[ghk]$ représentera une Rangée allant de l'origine au point dont les coordonnées numériques sont g, h, k dans son Assemblage polaire.

Le symbole (ghk) représentant le plan réticulaire dont l'équation est

$$gx + hy + kz = 0,$$

le symbole $[(ghk)]$ représentera un plan réticulaire dont l'équation est de même forme dans l'Assemblage polaire.

Je continuerai à désigner par Pghk le paramètre d'une Rangée allant de l'origine au Sommet dont les coordonnées numériques sont g, h, k, c'est-à-dire le paramètre de la Rangée ghk.

Je désignerai par P$[ghk]$ le paramètre d'une Rangée allant de l'origine au point dont les coordonnées numériques sont g, h, k dans l'Assemblage polaire, c'est-à-dire le paramètre de la Rangée polaire $[ghk]$.

Je continuerai à désigner par S(ghk) l'aire du parallélogramme générateur du Réseau tracé sur le plan réticulaire (ghk), dans l'Assemblage primitif.

De même S$[(ghk)]$ sera l'aire du parallélogramme élémentaire du Réseau tracé sur le plan réticulaire dont la notation est $[(ghk)]$, dans l'Assemblage polaire.

Continuant à nommer E l'intervalle moyen, et remarquant 1° que 100, 010, 001 sont les notations symboliques des axes des x, des y et des z; 2° que (100), (010), (001) sont les notations symboliques des plans des yz, des xz et des xy, on aura, d'après les conventions précédentes,

$$(63) \qquad \mathrm{P}[100] = \frac{\mathrm{S}(100)}{\mathrm{E}}, \quad \mathrm{P}[010] = \frac{\mathrm{S}(010)}{\mathrm{E}}, \quad \mathrm{P}[001] = \frac{\mathrm{S}(001)}{\mathrm{E}}.$$

Je continuerai à désigner par α, β, δ les angles plans sur les plans des yz, des xz et des xy; par μ, ν, ϖ, les angles dièdres ayant pour arêtes les axes

des x, des y et des z. Ceci posé, on aura évidemment

$$(64) \qquad \begin{cases} S(100) = P010 . P001 . \sin\alpha, \\ S(010) = P100 . P001 . \sin\beta, \\ S(001) = P100 . P010 . \sin\delta. \end{cases}$$

Dans l'Assemblage polaire, nous prendrons pour axe des $[x]$ la normale au plan des yz, pour axe des $[y]$ la normale au plan des xz, pour axe des $[z]$ la normale au plan des xy. Les trois demi-axes positifs doivent être dirigés du même côté que le demi-axe positif de même désignation dans l'Assemblage primitif, par rapport au plan auquel chacun de ces nouveaux axes est perpendiculaire. Les trois angles plans de ces axes seront représentés par $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\delta]$; leurs trois angles dièdres, par $[\mu]$, $[\nu]$, $[\varpi]$.

Théorème C. — *Les angles* α, β, δ *étant les angles plans du parallélipipède générateur de l'Assemblage primitif, et* μ, ν, ϖ *ses angles dièdres, les angles plans de son polaire seront* $180° - \mu$, $180° - \nu$, $180° - \varpi$, *et ses angles dièdres* $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \delta$.

C'est une conséquence bien connue des propriétés des triangles sphériques polaires.

On aura donc

$$(65) \qquad [\alpha] = 180° - \mu, \quad [\beta] = 180° - \nu, \quad [\delta] = 180° - \varpi,$$

$$(66) \qquad [\mu] = 180° - \alpha, \quad [\nu] = 180° - \beta, \quad [\varpi] = 180° - \delta.$$

Théorème CI. — *Si, du sommet* O *d'un tétraèdre* OABD (fig. 38), *on élève sur les trois faces latérales* OBD, OAD, OAB *les normales* Oa, Ob, Od, *situées, par rapport à chaque face, du même côté que le sommet opposé à la face, et égales respectivement aux aires triangulaires de ces trois faces, la diagonale du parallélipipède construit sur les arêtes* Oa, Ob, Od *sera normale à la base* ABD *et égale à l'aire de cette base.*

On a, par construction,

$$Oa = \text{aire OBD}, \quad Ob = \text{aire OAD}, \quad Od = \text{aire OAB}.$$

De même que Oa, Ob, Od sont perpendiculaires aux plans OBD, OAD,

OAB, de même OA, OB, OD seront perpendiculaires aux plans Obd, Oad, Oab.

Abaissons de O sur la base ABD la normale OP, et par a menons le plan $aA'p$ parallèle au plan bOd, et, par conséquent, normal à l'arête OA. Ce plan coupera OA en A' et OP en p. Projetons les triangles OBD, ABD sur le plan $aA'p$; O et A auront une même projection en A' : ainsi les deux aires projetées coïncideront. La première des deux aires projetées a pour valeur

$$\text{aire OBD}\cos(\widehat{\text{plan ODB}, \text{plan } aA'p}),$$

et, en remplaçant les plans par leurs normales,

$$\text{aire OBD}\cos(\widehat{Oa, OA}) = \text{aire OBD}\,\frac{OA'}{Oa} = OA'.$$

L'autre aire projetée sera de même

$$\text{aire ABD}\cos(\widehat{Op, OA}) = \text{aire ABD}\,\frac{OA'}{Op}.$$

Donc, en égalant ces deux expressions, il viendra

$$OA' = \text{aire ABD}\,\frac{OA'}{Op},$$

d'où

$$Op = \text{aire ABD}. \tag{67}$$

Menons maintenant par b un plan parallèle à aOd; on démontrera de même que ce plan coupe OP à une distance de O égale précisément à l'aire ABD, c'est-à-dire au point p déjà obtenu.

Il en sera de même, en menant par d un plan parallèle à aOb. Ces trois plans, avec leurs plans parallèles bOd, aOd, aOb, forment un parallélipipède dont Oa, Ob, Od sont les arêtes, et dont Op est la diagonale; cette diagonale est donc égale et normale au triangle ABD.

Corollaire. — Si les arêtes Oa, Ob, Od, sans être égales aux aires des faces, leur étaient proportionnelles dans le rapport $1:B$, la diagonale Op serait aussi, avec l'aire ABD, dans le même rapport $1:B$; elle continuerait à être normale au plan ABD.

Théorème CII. — *Si* (ghk) *est le symbole d'un plan réticulaire appartenant à un Assemblage donné, et si, dans son Assemblage polaire, l'on construit la droite menée de l'origine au point dont les coordonnées numériques sont* g, h, k, *cette droite, de symbole* $[ghk]$, *sera normale au plan* (ghk).

Soient Ox, Oy, Oz (*fig.* 39) les trois Rangées conjuguées prises pour axes coordonnés dans l'Assemblage primitif, et soient a, b, d les paramètres de ces Rangées. faisons

$$OA = hka, \quad OB = gkb, \quad OD = ghd.$$

L'équation du plan ABD en coordonnées numériques sera

$$gx + hy + kz = ghk.$$

On aura de plus

$$(68) \quad \begin{cases} \text{aire OBD} = \frac{1}{2} g^2 hk\, bd \sin\alpha = \frac{1}{2} g^2 hk\, S(100), \\ \text{aire OAD} = \frac{1}{2} gh^2 k\, ad \sin\beta = \frac{1}{2} gh^2 k\, S(010), \\ \text{aire OAB} = \frac{1}{2} ghk^2\, ab \sin\delta = \frac{1}{2} ghk^2\, S(001). \end{cases}$$

Les symboles $S(100)$, $S(010)$, $S(001)$ représentent, d'après nos conventions, les aires des parallélogrammes générateurs sur le plan des yz, sur le plan des xz et sur le plan des xy.

Construisons maintenant les trois axes de l'Assemblage polaire, et soient pris, sur ces axes,

$$Oa = gP[100] = \frac{gS(100)}{E},$$

$$Ob = hP[010] = \frac{hS(010)}{E},$$

$$Od = kP[001] = \frac{kS(001)}{E},$$

E étant l'intervalle moyen des Sommets.

Soit Op la diagonale du parallélipipède construit sur Oa, Ob, Od; les coordonnées numériques de p seront g, h, k dans l'Assemblage polaire, et la notation de la Rangée Op sera $[ghk]$.

En comparant les valeurs de Oa, Ob, Od aux expressions des aires OBD,

OAD, OAB (équations 68), on voit qu'elles leur sont proportionnelles, dans le rapport

$$\frac{1}{E} : \frac{1}{2} ghk = 1 : \frac{1}{2} ghk\, E.$$

Donc, d'après le corollaire du théorème CI, la diagonale Op sera normale à la base ABD, c'est-à-dire au système des plans réticulaires dont le symbole est (ghk).

Deuxième démonstration. — Si l'on veut démontrer le théorème CII par l'analyse géométrique à trois dimensions, on nommera τ l'inclinaison de l'axe Oz sur le plan des xy (*fig.* 39); ξ_0, η_0, ζ_0, les coordonnées linéaires du point a; ξ_1, η_1, ζ_1, celles du point b; ξ_2, η_2, ζ_2, celles du point d, et on posera

(69) $$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta = J^2.$$

On aura alors

$$\zeta_2 = \frac{Od}{\sin\tau} = \frac{Od\sin\delta}{J} = \frac{kab\sin^2\delta}{JE};$$

d'où l'on conclura facilement les valeurs de ξ_2, η_2 par les équations connues de la normale au plan des xy, dans les systèmes d'axes obliques.

On déterminerait de même $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$.

Les coordonnées ξ, η, ζ du point p seront alors données par les formules

$$\xi JE = (\xi_0 + \xi_1 + \xi_2) JE$$
$$= gbd\sin^2\alpha - had\sin\alpha\sin\beta\cos\varpi - kab\sin\alpha\sin\delta\cos\nu;$$
$$\eta JE = (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) JE$$
$$= -gbd\sin\alpha\sin\beta\cos\varpi + had\sin^2\beta - kab\sin\beta\sin\delta\cos\mu;$$
$$\zeta JE = (\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2) JE$$
$$= -gbd\sin\beta\sin\delta\cos\mu - had\sin\alpha\sin\delta\cos\nu + kab\sin^2\delta.$$

Si donc on pose, pour abréger,

(70) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{g}{a}\sin^2\alpha - \frac{h}{b}\sin\alpha\sin\beta\cos\varpi - \frac{k}{d}\sin\alpha\sin\delta\cos\nu = r,\\ &-\frac{g}{a}\sin\alpha\sin\beta\cos\varpi + \frac{h}{b}\sin^2\beta - \frac{k}{d}\sin\beta\sin\delta\cos\mu = s,\\ &-\frac{g}{a}\sin\beta\sin\delta\cos\mu - \frac{h}{b}\sin\alpha\sin\delta\cos\nu + \frac{k}{d}\sin^2\delta = t,\end{aligned}\right.$$

les équations de la droite Op seront

$$\frac{\xi}{r}=\frac{\eta}{s}=\frac{\zeta}{t}.$$

Or il est connu que ces équations, après substitution des valeurs de r, s, t, représenteront la normale au plan dont l'équation est

$$\frac{g}{a}\xi+\frac{h}{b}\eta+\frac{k}{d}\zeta=0,$$

et dont la notation symbolique est (ghk).

Théorème CIII. — *Si* (ghk) *est le symbole d'un plan réticulaire dans un Assemblage, sa normale sera une Rangée de l'Assemblage polaire, et y aura* $[ghk]$ *pour symbole.*

C'est un corollaire du théorème précédent.

Théorème CIV. — *Le paramètre de la Rangée* $[ghk]$ *est égal à l'aire du parallélogramme générateur du Réseau tracé sur le plan* (ghk), *divisée par l'intervalle moyen des Sommets.*

Les conventions sont les mêmes que dans les théorèmes précédents. Soit Op (*fig.* 39) le paramètre de la Rangée $[ghk]$, g, h, k n'ayant pas d'autre diviseur commun que l'unité ; d'après le corollaire du théorème CI, on aura

$$Op : \text{aire ABD} :: Oa : \text{aire OBD};$$

or ce rapport est $1 : \frac{1}{2} ghk\,\mathrm{E}$: donc

$$Op=\frac{2\,\text{aire ABD}}{ghk\,\mathrm{E}}.$$

Mais il a été démontré (théorème XXXVIII, équation 47) que l'on a

$$\text{aire ABD}=\tfrac{1}{2}ghk\,\omega,$$

ω étant l'aire du parallélogramme générateur du Réseau, sur le plan ABD. Donc, en remplaçant ω par $\mathrm{S}(ghk)$, on aura

$$2\,\text{aire ABD}=ghk\,\mathrm{S}(ghk),$$

$$Op=\frac{\mathrm{S}(ghk)}{\mathrm{E}}:$$

d'où l'on déduit la formule générale

$$(71) \qquad P[ghk] = \frac{S(ghk)}{E},$$

qui est la traduction algébrique de la proposition que nous avions à démontrer.

Scolie. — Ainsi les formules (63) ne sont que des cas particuliers de la formule (71).

Corollaire I. — Un Assemblage donné n'a qu'un seul Assemblage polaire, qui se trouve fixé, dès que l'on assigne le Sommet qui doit être commun aux deux Assemblages. Car l'Assemblage polaire construit sur trois Rangées conjuguées, prises au hasard, devra coïncider, d'après le théorème précédent, avec le polaire construit sur tout autre système de Rangées.

Corollaire II. — Si trois plans sont conjugués dans un Assemblage, leurs normales sont des Rangées conjuguées de son polaire.

Le parallélipipède construit sur ces trois Rangées sera le *parallélipipède polaire* de celui qui se construit avec les trois plans conjugués et leurs limitrophes, dans l'Assemblage primitif.

Corollaire III. — Réciproquement, si trois Rangées sont conjuguées dans un Assemblage, leurs plans normaux sont des plans conjugués dans son polaire.

Corollaire IV. — La condition pour que trois plans réticulaires (ghk), $(g'h'k')$, $(g''h''k'')$ soient conjugués, s'obtiendra en cherchant la condition pour que $[ghk]$, $[g'h'k']$, $[g''h''k'']$ soient trois Rangées conjuguées; elle sera donc (équation 43)

$$gh'k'' - gk'h'' + kg'h'' - hg'k'' + hk'g'' - kh'g'' = \pm 1.$$

PROBLÈME XXXI. — *Trouver* $S(ghk)$, *ou l'aire de la maille du Réseau du plan réticulaire* (ghk).

On a généralement (problème XVI) dans l'Assemblage primitif,

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} P^2 ghk &= g^2 P^2 100 + h^2 P^2 010 + k^2 P^2 001 \\ &\quad + 2gh\, P100.P010.\cos\delta + 2gk\, P100.P001.\cos\beta + 2hk\, P010.P001.\cos\alpha. \end{aligned} \right.$$

En écrivant que la même relation doit avoir lieu dans l'Assemblage

polaire, et remplaçant ensuite

$$\begin{array}{lll} P[ghk] & \text{par} & \frac{1}{E} S(ghk), \\ P[100] & \text{par} & \frac{1}{E} S(100), \\ P[010] & \text{par} & \frac{1}{E} S(010), \\ P[001] & \text{par} & \frac{1}{E} S(001), \\ [\alpha] & \text{par} & 180^\circ - \mu, \\ [\beta] & \text{par} & 180^\circ - \nu, \\ [\delta] & \text{par} & 180^\circ - \mu, \end{array}$$

on aura

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^2(ghk) = g^2 S^2(100) + h^2 S^2(010) + k^2 S^2(001) \\ \qquad - 2gh S(100).S(010).\cos\varpi - 2gk S(100).S(001).\cos\nu - 2hk S(010).S(001) \cos\mu. \end{array} \right.$$

C'est la formule déjà obtenue (équation 50) : mais il convenait de la rapprocher de la formule (72) pour montrer la loi remarquable de réciprocité qui les unit.

Remarque relative aux formules (72) *et* (73). — Si, dans l'équation (72), on écrit

$$P100 = \sqrt{a}, \quad P010 = \sqrt{a'}, \quad P001 = \sqrt{a''}, \quad Pghk = \sqrt{f},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a'a''}}, \quad \cos\beta = \frac{b'}{\sqrt{aa''}}, \quad \cos\delta = \frac{b''}{\sqrt{aa'}},$$

cette équation deviendra

$$f = ag^2 + a'h^2 + a''k^2 + 2b''gh + 2b'gk + 2bhk.$$

La quantité f a reçu, de M. Gauss, le nom de *forme ternaire* (Gauss, *Disquisitiones Arithmeticæ*, p. 426), et l'illustre géomètre l'exprime par le symbole

$$\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = f.$$

La quantité

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D$$

a été appelée, par M. Gauss, le *déterminant de la forme*. En remplaçant

a, a', a'', b, b', b'' par leurs valeurs, et tenant compte des équations (52) et (54), on trouve

$$D = P^2\,100 . P^2\,010 . P^2\,001\,(-1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta) = -E^6,$$

la lettre E continuant à représenter l'intervalle moyen des Sommets de l'Assemblage.

On voit, d'après cela, que toute forme ternaire correspond à un Assemblage de points, *réels* ou *imaginaires;* que chaque valeur particulière de f, pour des valeurs déterminées et entières de g, h, k, exprime le carré de la distance de deux points ou Sommets de l'Assemblage; que le déterminant de la forme, pris avec le signe $-$, est le carré du volume du parallélipipède générateur, ou la sixième puissance de l'intervalle moyen des Sommets, etc.

Des résultats analogues ont lieu pour les formes binaires

$$ag^2 + 2\,bgh + a'h^2,$$

dont le déterminant $b^2 - aa'$, pris avec un signe contraire, représente le carré de l'aire du parallélogramme générateur, ou la quatrième puissance de l'intervalle moyen des Sommets sur le plan du Réseau qui dérive de cette forme binaire.

La forme ternaire

$$\begin{pmatrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - b'b'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{pmatrix}$$

a été appelée, par M. Gauss, la forme *adjointe* de la forme

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix};$$

elle est désignée dans les *Disquisitiones* par la lettre F.

Il résulte du mode de génération de a, a', a'', b, b', b'', que l'on a

$$b^2 - a'a'' = -P^2\,010 . P^2\,001 . \sin^2\alpha = -S^2(100),$$

$$b'^2 - aa'' = -S^2(010),$$

$$b''^2 - aa' = -S^2(001),$$

$$ab - b'b'' = P^2\,100 . P\,010 . P\,001\,(\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta) = S(001) . S(010) . \cos\mu,$$

$$a'b' - bb'' = S(001) . S(100) . \cos\nu,$$

$$a''b'' - bb' = S(100) . S(010) . \cos\varpi;$$

On aura donc, après la substitution de ces valeurs dans la forme F,

$$-F = g^2 S^2(100) + h^2 S^2(010) + k^2 S^2(001)$$
$$- 2gh\, S(100).S(010).\cos\varpi - 2gk\, S(100).S(001).\cos\nu - 2hk\, S(010).S(001).\cos\mu;$$

donc aussi

$$F = -S^2(ghk) = -E^2 P^2 [ghk].$$

Ainsi la forme ternaire adjointe représente le carré de l'aire élémentaire du plan (ghk) pris avec le signe —. On voit aussi que, si la forme f se laisse représenter géométriquement par un Assemblage, sa forme adjointe F sera représentée de même par son Assemblage polaire, après toutefois que les paramètres du polaire auront tous été multipliés par l'intervalle moyen E, c'est-à-dire par la racine sixième du déterminant D pris avec le signe —.

L'analogie singulière qui existe entre les propriétés des formes binaires et ternaires, et les propriétés géométriques dont jouissent les Réseaux et Assemblages, a été signalée par M. Seeber, dans ses « Recherches sur les formes ternaires » (*voyez* le Journal de Crelle, tome XX, page 318).

THÉORÈME CV. — *Le volume du parallélipipède élémentaire est le même dans l'Assemblage primitif et dans son polaire.*

Soient Ω le volume du parallélipipède générateur de l'Assemblage donné, et $[\Omega]$ celui de son Assemblage polaire. On aura évidemment

$$[\Omega] = \frac{ab\sin\delta}{E}\,\frac{ad\sin\beta}{E}\,\frac{bd\sin\alpha}{E}\sin\mu\sin\nu\sin\delta,$$

a, b, d étant les paramètres de l'Assemblage primitif.

Or on a, d'autre part,

$$(74)\qquad \begin{cases} \sin\beta\sin\delta\sin\mu = J, \\ \sin\alpha\sin\delta\sin\nu = J, \end{cases}$$

J étant toujours donné par l'équation (69). Donc

$$[\Omega] = \frac{a^2 b^2 d^2 J^2}{E^3},$$

et comme d'ailleurs

$$abd\,\mathrm{J} = \Omega \quad (\text{équation } 41),$$
$$\mathrm{E}^3 = \Omega \quad (\text{équation } 54),$$

il vient enfin

(75) $$[\Omega] = \Omega.$$

Scolie. — L'Assemblage polaire a la même densité, c'est-à-dire la même richesse en Sommets, que l'Assemblage primitif; l'intervalle moyen E conserve la même valeur dans les deux Assemblages; ainsi

(76) $$[\mathrm{E}] = \mathrm{E}.$$

Théorème CVI. — *En construisant l'Assemblage polaire d'un Assemblage polaire, on retombe sur l'Assemblage primitif.*

Déterminons l'aire élémentaire du Réseau du plan des $[yz]$ dans l'Assemblage polaire. Les deux paramètres, côtés du parallélogramme générateur, sont

$$\frac{ad \sin\beta}{\mathrm{E}}, \quad \frac{ab \sin\delta}{\mathrm{E}};$$

l'angle compris $[\alpha]$ est égal à $180° - \mu$ (théorème C). Donc on aura

$$\mathrm{S}[(100)] = \frac{a^2 bd \sin\beta \sin\delta \sin\mu}{\mathrm{E}^2} = \frac{\mathrm{E}a^2\, bd \sin\beta \sin\delta \sin\mu}{\Omega}.$$

Or on a d'ailleurs

$$abd \sin\beta \sin\delta \sin\mu = abd\,\mathrm{J} = \Omega;$$

donc

$$\mathrm{S}[(100)] = \mathrm{E}a = \mathrm{E\,P}100.$$

On démontrerait de même que l'on a

$$\mathrm{S}[(010)] = \mathrm{E}b = \mathrm{E\,P}010,$$
$$\mathrm{S}[(001)] = \mathrm{E}d = \mathrm{E\,P}001.$$

Si l'on construit, en direction, les axes de l'Assemblage qui est le polaire de celui construit sur Oa, Ob, Od (*fig.* 39), on retombe sur OA, OB, OD; si l'on construit, en grandeur, les paramètres de ces axes, par les formules convenues (équations 63),

$$\frac{\mathrm{S}[(100)]}{[\mathrm{E}]}, \quad \frac{\mathrm{S}[(010)]}{[\mathrm{E}]}, \quad \frac{\mathrm{S}[(001)]}{[\mathrm{E}]},$$

à cause de $[E] = E$, on retombera sur les paramètres a, b, d, ou P100, P010, P001. L'Assemblage ainsi obtenu coïncide donc avec l'Assemblage primitif.

THÉORÈME CVII. — *Si* ghk *est le symbole d'une Rangée, dans un Assemblage, son plan normal sera un plan réticulaire de l'Assemblage polaire, et il aura* $[(ghk)]$ *pour symbole.*

Car on peut, d'après le théorème précédent, considérer l'Assemblage polaire comme étant l'Assemblage primitif, et le primitif comme étant le polaire de l'autre Assemblage : alors (théorème CIII), le symbole de la normale au plan (ghk) doit être $[ghk]$. Pour revenir à notre premier point de vue, il suffit de transporter les crochets [ ] d'un symbole à l'autre, et l'on voit que le symbole de la normale au plan $[(ghk)]$ sera ghk : donc la Rangée ghk est normale au plan réticulaire $[(ghk)]$.

Corollaire. — Si $[ghk]$ est le symbole d'une Rangée du polaire, (ghk) sera celui de son plan normal, qui sera un plan réticulaire de l'Assemblage primitif.

Définition. — Les propriétés des Assemblages polaires dans l'espace ont leurs analogues sur le plan. A chaque Réseau correspond un *Réseau polaire*, que l'on obtient de la manière suivante :

Soient $Oa = a$, $Ob = b$ les deux paramètres, sur les axes Ox, Oy (*fig.* 40); soit δ l'angle xOy; soit ε l'intervalle moyen donné par la formule

$$\varepsilon^2 = ab \sin \delta.$$

Sur ce Réseau, et avec le paramètre ε normal au plan xOy, comme axe des z, que l'on construise un Assemblage, qui aura le Réseau du plan xOy pour base.

On aura

$$\Omega = \varepsilon ab \sin \delta = \varepsilon^3;$$

ainsi ε sera l'intervalle moyen des Sommets de cet Assemblage auxiliaire.

En construisant son Assemblage polaire, on voit que l'axe des $[x]$ sera la normale $O[x]$ à l'axe Oy, et que l'axe des $[y]$ sera la normale $O[y]$ à l'axe Ox. Soient donc $O[a] = [a]$, $O[b] = [b]$ les paramètres relatifs à ces axes; on aura

$$[a] = \frac{b\varepsilon}{\varepsilon} = b, \quad [b] = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon} = a.$$

En construisant un Réseau sur ces paramètres, l'on obtiendra le *polaire* du Réseau donné. Si, maintenant, sur le prolongement de la droite $O[y]$, vous prenez $O[b'] = O[b]$, le Sommet $[b']$ appartiendra aussi au Réseau polaire; et comme l'on aura

$$O[a] = Ob, \quad O[b'] = Oa,$$

les triangles bOa, $[a]O[b']$ seront égaux. De là résulte le théorème suivant :

Théorème CVIII. — *Un Réseau polaire dérive du Réseau primitif par une rotation de 90 degrés de celui-ci autour d'un des Sommets pris pour origine.*

Scolie. — Si, après cette rotation, l'axe des y positives devient l'axe des $[x]$ positives du Réseau polaire, l'axe des x positives deviendra l'axe des $[y]$ négatives : l'inverse aura lieu, si la rotation est effectuée en sens contraire.

Théorème CIX. — *Tout Assemblage polaire possède les mêmes axes de symétrie que l'Assemblage primitif.*

Soit O (*fig.* 41) le Sommet commun aux deux Assemblages, origine des coordonnées; soient OO′ un axe de symétrie de l'Assemblage primitif, et OP une des Rangées de l'Assemblage polaire, O et P étant deux Sommets voisins sur cette Rangée. Menons par O le plan RR′ normal à OP, et qui sera un plan réticulaire de l'Assemblage primitif (théorème CVII, corollaire).

Soit maintenant q le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe OO′; faisons tourner RR′ autour de OO′ de $\frac{360^\circ}{q}$, de $\frac{2.360^\circ}{q}$, $\frac{3.360^\circ}{q}$, etc. : on obtiendra autant de plans réticulaires de même espèce (théorème LXXXVIII), dont les normales seront aussi des Rangées de l'Assemblage polaire (théorème CIII). Ces normales s'obtiendront en faisant tourner OP autour de OO′ d'angles égaux à $\frac{360^\circ}{q}$, $\frac{2.360^\circ}{q}$, etc. : dans ce mouvement, le point P viendra successivement en P′, en P″, etc.; d'où l'on voit qu'il aura $q - 1$ Sommets homologues par rapport à l'axe OO′, et, comme P est un Sommet quelconque de l'Assemblage polaire, l'axe OO′ sera un axe de symétrie d'ordre q dans ce dernier Assemblage.

Corollaire. — S'il existe des plans de symétrie dans l'Assemblage primi-

tif, ces plans seront aussi des plans de symétrie du polaire; car, à tout plan de symétrie correspond un axe de symétrie d'ordre pair, et cet axe devra se retrouver dans le polaire. Or, réciproquement, à tout axe de symétrie d'ordre pair correspond un plan de symétrie qui lui est normal; ainsi, ce plan de symétrie se retrouvera dans l'Assemblage polaire.

Théorème CX. — *Si l'on centre tous les parallélipipèdes dont la réunion compose un Assemblage donné* A, *dont le polaire* [A] *est connu, et si l'on forme ainsi un nouvel Assemblage* A', *l'Assemblage obtenu, en centrant les six faces des parallélipipèdes polaires qui composent l'Assemblage* [A], *et agrandissant ensuite toutes ses dimensions dans le rapport* $1 : \sqrt[3]{2}$, *sera l'Assemblage polaire de* A'.

Soit Ω' le noyau de l'Assemblage A'; le volume de ce noyau sera égal évidemment à la moitié du volume de l'ancien noyau, de sorte que l'on aura

$$\Omega' = \tfrac{1}{2}\Omega.$$

Soient E et E' les intervalles moyens des Assemblages A et A'; l'on aura

$$E'^3 = \tfrac{1}{2}E^3, \quad E = E'\sqrt[3]{2}.$$

D'autre part, on a, dans le polaire de A', en distinguant par des accents les grandeurs qui se rapportent à l'Assemblage A' et à son polaire [A'],

$$P'[100] = \frac{S'(100)}{E'}, \quad P'[010] = \frac{S'(010)}{E'}, \quad P'[001] = \frac{S'(001)}{E'}.$$

Mais, comme les Réseaux sur les plans des yz, des xz et des xy ne sont pas troublés par le centrage, il vient

$$\begin{aligned} S'(100) &= S(100) = E\,P[100], \\ S'(010) &= S(010) = E\,P[010], \\ S'(001) &= S(001) = E\,P[001]. \end{aligned}$$

Donc, substituant, l'on aura

$$(77)\qquad \begin{cases} P'[100] = \sqrt[3]{2}.P[100], \\ P'[010] = \sqrt[3]{2}.P[010], \\ P'[001] = \sqrt[3]{2}.P[001]. \end{cases}$$

P[100], P[010], P[001] représentent en grandeur et en direction les arêtes des trois faces contiguës du parallélipipède générateur de l'Assemblage polaire [A]. Si, au contraire, on considère les plans diagonaux (110), (101), (011), et spécialement ceux qui ont pour équation, dans l'Assemblage primitif,

$$x+y=1, \quad x+z=1, \quad y+z=1,$$

on voit facilement que ces plans passent par le centre du parallélipipède générateur : ainsi, les parallélogrammes des Réseaux de ces plans deviennent tous centrés, et l'aire de leur maille devient moitié moindre. On a donc

$$S'(110)=\tfrac{1}{2}S(110),$$
$$S'(101)=\tfrac{1}{2}S(101),$$
$$S'(011)=\tfrac{1}{2}S(011).$$

Donc

(78)
$$P'[110]=\frac{S'(110)}{E'}=\frac{E}{E'}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{S(110)}{E}=\sqrt[3]{2}\cdot\tfrac{1}{2}P[110],$$
et de même
$$P'[101]=\sqrt[3]{2}\cdot\tfrac{1}{2}P[101],$$
$$P'[011]=\sqrt[3]{2}\cdot\tfrac{1}{2}P[011].$$

P[110], P[101], P[011] représentent en grandeur et en direction les diagonales des trois faces contiguës du parallélipipède générateur de l'Assemblage polaire [A].

Des équations (77) et (78) on conclut qu'il faut, pour obtenir l'Assemblage [A'], multiplier par $\sqrt[3]{2}$ les dimensions du parallélipipède générateur du polaire [A], puis diminuer de moitié les paramètres des diagonales de ses six faces, ce qui s'obtiendra en centrant ces faces.

La première de ces deux opérations change le noyau Ω du polaire [A] en $\Omega(\sqrt[3]{2})^3 = 2\Omega$. Par la seconde opération, le parallélipipède générateur prend des bases et des hauteurs deux fois plus petites ; son noyau 2Ω devient donc égal à

$$\tfrac{1}{4}2\Omega=\tfrac{1}{2}\Omega=\Omega',$$

c'est-à-dire égal au noyau de l'Assemblage A'. Le centrage de l'Assemblage [A'] ainsi obtenu est donc complet ; un centrage ultérieur, s'il pouvait

avoir lieu, rendrait la densité de [A′] supérieure à celle de A′, ce qui n'est pas possible (théorème CV, scolie). Donc [A′] est le polaire de l'Assemblage centré A′.

Théorème CXI. — *Si l'on centre les faces des parallélipipèdes générateurs qui composent un Assemblage donné* A *dont le polaire* [A] *est connu, pour former par ce centrage un nouvel Assemblage* A′, *on obtiendra le polaire* [A′] *de l'Assemblage* A′, *en centrant les parallélipipèdes polaires qui composent l'Assemblage* [A], *et diminuant toutes ses dimensions dans le rapport* $\sqrt[3]{2}:1$.

En général, soient M et N deux Assemblages qui soient le polaire l'un de l'autre; soit M_c ce que devient l'Assemblage M quand on centre tous ses parallélipipèdes; soit N_f ce que devient N lorsqu'on centre les faces de ses parallélipipèdes, polaires de ceux de M : il résulte du théorème précédent que M_c et N_f réunissent les conditions de dimensions relatives nécessaires pour être polaires l'un de l'autre; seulement, au lieu d'avoir

$$\text{noyau } M_c = \text{noyau } N_f,$$

on aura

(79) $$\text{noyau } M_c = 2 \text{ noyau } N_f.$$

Alors, si l'on augmente les dimensions de N_f dans le rapport $\sqrt[3]{2}$ à l'unité, les noyaux deviennent égaux et les Assemblages sont réciproquement polaires (théorème précédent).

On peut obtenir le même résultat, en diminuant les dimensions de M_c dans le rapport $\sqrt[3]{2}:1$; les noyaux deviennent égaux, et les Assemblages, réciproquement polaires.

Dans le cas actuel, posons $N = A$, $M = [A]$, $N_f = A'$; M_c sera l'Assemblage [A] dont on a centré les parallélipipèdes, et M_c réduit dans ses dimensions suivant le rapport $\sqrt[3]{2}:1$ sera le polaire de A′.

Théorème CXII. — *Si l'on centre, dans les plans* $z = 0$, $z = 1$, *les bases des parallélipipèdes générateurs qui composent un Assemblage* A *dont le polaire* [A] *est connu, on obtiendra le polaire de l'Assemblage à bases*

centrées A′, *en centrant, sur les plans* $[z]=0$, $[z]=1$, *les bases de* [A], *multipliant les paramètres, sur les axes des* $[x]$ *et des* $[y]$, *par le rapport* $\sqrt[3]{2}:1$, *et celui de l'axe des* $[z]$ *par le rapport* $\sqrt[3]{2}:2$.

En appliquant la méthode employée pour la démonstration du théorème CX, on trouve

$$E = E'\sqrt[3]{2},$$

$$S'(100) = S(100) = EP[100],$$

$$S'(010) = S(010) = EP[010],$$

$$S'(001) = \tfrac{1}{2}S(001) = \tfrac{1}{2}EP[001],$$

$$(80)\quad \begin{cases} P'[100] = \sqrt[3]{2}.P[100], \\ P'[010] = \sqrt[3]{2}.P[010], \\ P'[001] = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}.P[001], \end{cases}$$

$$S'(110) = \tfrac{1}{2}S(110),$$

$$S'(101) = S(101),$$

$$S'(011) = S(011),$$

$$(81)\quad \begin{cases} P'[110] = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}.P[110], \\ P'[101] = \sqrt[3]{2}.P[101], \\ P'[011] = \sqrt[3]{2}.P[011]. \end{cases}$$

Des équations (80) et (81) on conclut qu'il faut multiplier par $\sqrt[3]{2}$ toutes les dimensions de l'Assemblage [A], puis diminuer de moitié le paramètre relatif à l'axe des $[z]$, ainsi que le paramètre de la diagonale [110]; cette dernière opération équivaut à centrer les parallélogrammes sur le plan des $[xy]$.

La première opération change le noyau Ω de l'Assemblage [A] en 2Ω; la deuxième le divise par 2, et le ramène à la valeur Ω; la troisième le divise par 2, et le rend égal à $\frac{1}{2}\Omega$: or telle est aussi la valeur du noyau de l'Assemblage A′. Donc l'Assemblage ainsi obtenu sera le polaire de A′.

Problème XXXII. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie binaire.*

Soient Oz l'axe binaire (*fig.* 42), et d son paramètre : soient $Ox = a$, $Oy = b$ et $xOy = \delta$.

Supposons d'abord le prisme non centré, et posons

$$abd \sin \delta = R^2; \tag{82}$$

E étant l'intervalle moyen, nous aurons

$$E^2 = R^2.$$

L'axe des $[z]$ coïncidera avec Oz; les axes des $[x]$ et des $[y]$ seront situés dans le plan des xy, et l'on aura

$$[a] = E^2 \frac{1}{a \sin \delta} = \frac{d}{E} b,$$

$$[b] = E^2 \frac{1}{b \sin \delta} = \frac{d}{E} a,$$

$$[d] = E^2 \frac{1}{d} = \frac{E^2}{d^2} d.$$

Les axes des x, y, z étant conjugués, puisque le prisme droit n'est pas centré, les axes des $[x]$, $[y]$ et $[z]$ le seront pareillement, et le générateur de l'Assemblage polaire sera un prisme droit à base parallélogrammique. Le Réseau du plan des $[x]$ $[y]$ sera le polaire du Réseau des xy, agrandi ou diminué, dans le rapport $d : E$.

Si le prisme générateur était centré (*voyez* le théorème LV), il faudrait centrer les faces du prisme polaire obtenu en ne tenant d'abord pas compte du centrage (théorème CX), et agrandir ensuite ses dimensions dans le rapport $1 : \sqrt[3]{2}$. On aurait ainsi pour générateur un octaèdre droit à base parallélogrammique, ou, ce qui revient au même, un prisme droit centré à base parallélogrammique. On trouve alors, pour les arêtes de ce dernier prisme,

$$[a] = R^2 \sqrt[3]{2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta}}{2ab \sin \delta},$$

$$[b] = R^2 \sqrt[3]{2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta}}{2ab \sin \delta},$$

$$[d] = R^2 \sqrt[3]{2} \frac{1}{d},$$

et, pour l'angle compris entre $[a]$ et $[b]$,

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2ab \sin \delta}{a^2 - b^2}\right).$$

Problème XXXIII. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie terbinaire.*

Prenons pour axes coordonnés les trois axes de symétrie binaire. Soient a, b, d les paramètres des axes des x, des y et des z; $[a]$, $[b]$, $[d]$ ceux des axes des $[x]$, des $[y]$ et des $[z]$. L'axe des $[x]$ coïncidera avec l'axe des x, l'axe des $[y]$ avec celui des y, et l'axe des $[z]$ avec celui des z.

Ceci posé, il peut se présenter quatre cas différents.

Si le prisme droit, à arêtes a, b, d, n'est pas centré, l'Assemblage polaire aura pour générateur un prisme droit à base rectangulaire.

Faisons, pour abréger,

$$abd = R^3; \tag{83}$$

nous aurons évidemment

$$E^3 = R^3, \tag{84}$$

$$[a] = E^2\frac{1}{a}, \quad [b] = E^2\frac{1}{b}, \quad [d] = E^2\frac{1}{d}.$$

Si le prisme droit est centré en son centre de volume (cas où l'Assemblage peut être considéré comme dérivant de l'octaèdre droit à base rectangulaire), le polaire est un prisme droit, centré sur ses six faces, et l'on trouve facilement (théorème CX)

$$E^3 = \tfrac{1}{2}R^3, \tag{85}$$

$$[a] = R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{a} = 2E^2\frac{1}{a},$$

$$[b] = R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{b} = 2E^2\frac{1}{b},$$

$$[d] = R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{d} = 2E^2\frac{1}{d};$$

le prisme construit sur $[a]$, $[b]$, $[d]$ doit ensuite être centré sur ses six faces, et alors il équivaudra à un octaèdre droit à base rhombe.

Si le prisme droit est centré sur ses six faces (cas où l'Assemblage peut être considéré comme dérivant d'un octaèdre droit à base rhombe), en vertu du théorème CXI, on retombe sur le prisme droit centré, lequel équivaut à l'octaèdre droit à base rectangulaire. Soient toujours a, b, d les arêtes

du prisme droit à faces centrées. On aura, d'après le théorème CXI,

$$(86)\qquad \begin{aligned} E^3 &= \tfrac{1}{4} R^3, \\ [a] &= R^2 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\, \frac{1}{a} = 2E^2 \frac{1}{a}, \\ [b] &= R^2 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\, \frac{1}{b} = 2E^2 \frac{1}{b}, \\ [d] &= R^2 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\, \frac{1}{d} = 2E^2 \frac{1}{d}; \end{aligned}$$

$[a]$, $[b]$, $[d]$ seront les arêtes du prisme droit rectangulaire, lequel, étant centré, deviendra le générateur du polaire cherché.

Enfin, si le prisme était centré sur deux de ses faces, par exemple sur ses deux bases (cas où l'Assemblage peut être considéré comme dérivant d'un prisme droit à base rhombe), on trouverait, en se conformant aux prescriptions du théorème CXII, et par des calculs analogues aux précédents,

$$[a] = 2E^2 \frac{1}{a}, \quad [b] = 2E^2 \frac{1}{b}, \quad [d] = E^2 \frac{1}{d};$$

puis l'on centrerait le rectangle construit sur $[a]$ et $[b]$: on aurait ainsi un nouveau prisme droit à base rhombe.

On peut aussi, pour ce dernier cas, s'appuyer sur la solution du problème XXXII. Faites, dans les calculs relatifs à ce problème,

$$a = a', \quad b = a', \quad E = E',$$

ce qui revient à prendre pour axes des x et des y les deux diagonales de la base rectangulaire centrée. Alors

$$(87)\qquad \begin{aligned} E'^3 &= a'^2 d \sin \delta, \\ [a'] &= E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a', \\ [b'] &= E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a', \\ [d] &= E'^2 \frac{1}{d} = \frac{E'^2}{d^2} d, \end{aligned}$$

et l'angle du rhombe de la base du polaire sera $180° - \delta$.

Corollaire I. — Le polaire du prisme droit à base rectangulaire est un prisme droit à base rectangulaire ; celui du prisme droit à base rhombe est

un prisme droit à base rhombe : les deux rectangles, ou les deux rhombes, sont semblables.

Corollaire II. — L'octaèdre droit à base rectangulaire et l'octaèdre droit à base rhombe sont réciproquement polaires l'un de l'autre.

PROBLÈME XXXIV. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage ternaire, ou rhomboédrique.*

Le polaire d'un Assemblage construit sur un rhomboèdre dont l'angle plan est égal à α, et l'angle dièdre égal à μ, est un autre rhomboèdre dont l'angle plan $[\alpha]$ (théorème C) est égal à $180^\circ - \mu$, et l'angle dièdre $[\mu]$ à $180^\circ - \alpha$ (*).

Le rhomboèdre primitif sera complétement défini, si l'on donne le paramètre a du Réseau à maille triéquiangle normal à l'axe ternaire, et le paramètre d de cet axe ternaire. On trouve alors, par des propriétés connues du rhomboèdre,

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2(1-\cos\alpha)} &= \frac{d^2}{9a^2} + \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2(1+\cos\mu)} &= \frac{a^2}{4d^2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}\right.$$

Soient $[a]$ et $[d]$ les paramètres de même signification dans le rhomboèdre polaire; on aura

$$\frac{1}{2(1+\cos[\mu])} = \frac{[a]^2}{4[d]^2} + \frac{1}{3};$$

or

$$1 + \cos[\mu] = 1 - \cos\alpha :$$

donc

$$\frac{d^2}{9a^2} = \frac{[a]^2}{4[d]^2};$$

donc enfin

$$(89)\qquad \frac{a[a]}{2} = \frac{d[d]}{3},$$

relation qui exprime la condition pour que deux rhomboèdres soient semblables, chacun d'eux au polaire de l'autre.

Pour l'égalité des deux volumes, on a, en outre, la condition

$$(90)\qquad E^3 = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,a^2 d = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,[a]^2[d].$$

(*) C'est ce rhomboèdre que le professeur Weiss a appelé le rhomboèdre par inversion, « Invertirungs-Rhomboeder ». (*Mémoires de l'Académie* de Berlin, t. XV, p. 93.)

On en conclura les valeurs de $[a]$ et $[d]$, savoir :

$$[a] = d\sqrt[3]{\frac{2a}{3d}} = 2E^2\frac{1}{a},$$

$$[d] = a\sqrt[3]{\frac{9a}{4d}} = 3E^2\frac{1}{d}.$$

Problème XXXV. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie quaternaire.*

Soient a, a les deux paramètres des côtés de la base carrée ; soit d le paramètre de l'axe des z, axe de symétrie quaternaire.

S'il s'agit d'un prisme à base carrée, non centré, l'on aura

$$(91) \qquad a^2 d = R^3, \qquad E^3 = R^3,$$

$$[a] = E^2\frac{1}{a}, \qquad [d] = E^2\frac{1}{d};$$

le polaire sera aussi un prisme à base carrée.

S'il s'agit d'un prisme centré à base carrée, le polaire sera un prisme centré à base carrée dont les éléments peuvent se déduire de la solution du deuxième cas du problème XXXIII. Dans les formules relatives à ce cas, faites $b = a$; vous trouverez un prisme droit centré à base carrée déterminé par les formules

$$(92) \qquad E^3 = \tfrac{1}{2}R^3,$$

$$[a] = \sqrt{2}\,E^2\frac{1}{a}, \qquad [d] = 2E^2\frac{1}{d}.$$

Problème XXXVI. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie sénaire.*

Le générateur de l'Assemblage est un prisme droit à base rhombe, dont les côtés sont a, a, l'angle compris δ égal à 120 degrés, la hauteur égale à d.

On trouve alors (*voyez* la solution du problème XXXIII, quatrième cas) que le générateur du polaire est un prisme droit à base rhombe, l'angle du rhombe étant $180° - \delta$ ou 60 degrés, c'est-à-dire un prisme à symétrie sénaire, comme on devait s'y attendre (théorème CIX).

Soient $[a]$, $[a]$ les côtés du rhombe dans le prisme polaire, et $[d]$ la

hauteur : on aura, en appliquant les formules (87),

(93) $$E^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2 d,$$

$$[a] = \sqrt{\tfrac{4}{3}}\,E^2\,\frac{1}{a},$$

$$[d] = E^2\,\frac{1}{d}.$$

On a, entre a, d, $[a]$ et $[d]$, les relations

(94) $$\frac{a[a]}{2} = \frac{d[d]}{\sqrt{3}},$$

(95) $$a^2 d = [a^2][d],$$

qui sont les analogues de (89) et (90).

Le Réseau du plan normal à l'axe sénaire tourne de 90 degrés dans son plan, et se modifie quant à son paramètre minimum.

Problème XXXVII. — *Trouver l'Assemblage polaire d'un Assemblage à symétrie terquaternaire.*

Si le générateur de l'Assemblage est un cube, son polaire aura pour générateur le même cube.

Si le générateur de l'Assemblage est un cube centré, de côté a, son polaire sera un cube à faces centrées (théorème CX), dont le côté $[a]$ sera donné par la formule

$$[a] = a\sqrt[3]{2}.$$

Réciproquement, si le générateur était un cube à faces centrées de côté a $\left(\text{ou octaèdre régulier de côté } a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$, son polaire serait un cube centré (théorème CXI) de côté $[a]$, donné par l'équation

$$[a] = a\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}.$$

Ainsi les deux derniers modes sont réciproquement polaires l'un de l'autre.

On pourrait aussi démontrer ces derniers résultats en considérant les rhomboèdres générateurs. Le rhomboèdre de 90 degrés a un angle plan de 90 degrés ; il aura donc pour polaire un rhomboèdre de 90 degrés (solution du problème XXXIV).

Le rhomboèdre de 70° 31′ 44″ a un angle plan de 60 degrés; il aura donc pour polaire le rhomboèdre de 120 degrés.

Le rhomboèdre de 120 degrés a un angle plan de 109° 28′ 16″; il aura donc pour polaire le rhomboèdre de 70° 31′ 44″.

Quoique le Mémoire qui précède puisse être considéré comme étant une pure spéculation géométrique, et que les relations qui y sont démontrées soient indépendantes des propriétés physiques des corps, cependant ce travail a été exécuté, par l'auteur, avec la pensée de s'en servir ultérieurement pour l'explication des faits fondamentaux de la cristallographie, et c'est vers ce but que sa rédaction a été spécialement dirigée.

Il a toujours été admis, depuis Haüy, soit implicitement, soit explicitement, que les centres des molécules des corps cristallisés sont distribués, à des intervalles égaux, suivant des séries rectilignes, parallèles aux intersections des plans de clivage. Le système géométrique formé par ces centres n'est donc rien autre chose que ce que nous avons nommé un « Assemblage de points », et toutes les considérations développées dans ce Mémoire lui sont applicables.

Si maintenant l'on admet qu'une cause quelconque intervienne pour disposer l'Assemblage qui se constitue, au moment de la cristallisation, à une structure symétrique plutôt qu'à une structure non symétrique, il est clair que l'Assemblage définitivement formé appartiendra à l'une de nos sept classes (page 88), et de préférence à l'une des six premières, qui possèdent seules des axes ou plans de symétrie. L'observation des corps cristallisés, naturels ou artificiels, prouve *à posteriori* qu'il en est ainsi; aussi la division géométrique des Assemblages correspond-elle fidèlement à celle qu'une étude patiente et attentive a porté à établir entre les différents systèmes cristallins.

Mais quelle est la cause de cette tendance des Assemblages, que forment les centres des molécules des cristaux, vers la régularité symétrique? C'est ce que j'essayerai d'expliquer dans un autre Mémoire dont la rédaction est aujourd'hui terminée, et qui, je l'espère, pourra être imprimé prochainement. Les principaux résultats de ce nouveau travail ont été commu-

niqués à la Société Philomathique, dans les séances des 17 et 24 mars, 19 mai, 7 juillet et 17 novembre 1849 (*voyez* le Journal l'*Institut*, année 1849, aux comptes rendus de ces séances). Le Mémoire que l'on vient de lire, ainsi que celui « Sur les Polyèdres de forme symétrique », imprimé dans le tome XIV du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, forment, en quelque sorte, les Prolégomènes de la théorie cristallographique qui s'y trouvera développée.

Je me borne à signaler dès à présent la forme polyédrale, ou, si l'on veut, polyatomique, de la molécule du corps cristallisé, comme déterminant le genre de symétrie de l'Assemblage cristallin correspondant; la même cause, suivie dans ses conséquences ultérieures, explique d'une manière simple l'ensemble des phénomènes de l'hémiédrie, de l'hémitropie et de l'isomorphisme. Si elle ne résout pas complétement le problème encore si difficile du dimorphisme, du moins elle indique comment l'on doit chercher à distinguer le dimorphisme de l'isomérie, et elle fait voir que, dans certains cas, le dimorphisme proprement dit, c'est-à-dire la cristallisation de molécules identiques dans deux systèmes cristallographiques distincts, suivant l'état du milieu ambiant, est un fait admissible, bien que contraire aux idées qui sont aujourd'hui le plus généralement adoptées en minéralogie.

Un Rapport sur le Mémoire actuel a été lu par M. Cauchy, à l'Académie des Sciences, le 6 août 1849 [*] (*voyez* les *Comptes rendus*, tome XXIX, page 133).

Qu'il me soit permis, en terminant, de remercier l'illustre rapporteur, de la bienveillance avec laquelle il a apprécié mon travail!

[*] Commissaires, MM. Biot, Beudant, Dufrénoy, Regnault, Lamé, Cauchy rapporteur.

...istribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace,
...A. Bravais

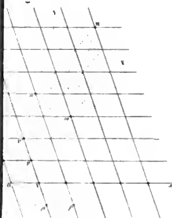

Fig. 3.


Fig. 4.

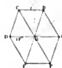
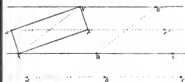
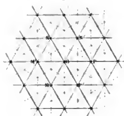
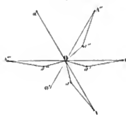
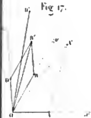

Fig. 5.

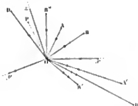

Fig. 6.

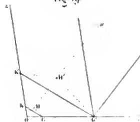

Fig. 10.


Fig. 11.


Fig. 12.

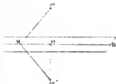

Fig. 17.

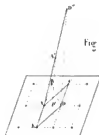

Fig. 18.


Fig. 19.

Gravé par F. Bonnier

distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace ;
1. Bravais.


Fig. 23.


Fig. 24.

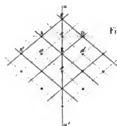
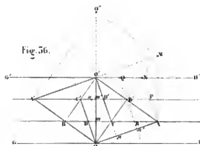

Fig. 25.


Fig. 29.


Fig. 30.


Fig. 31.


Fig. 32.


Fig. 36.

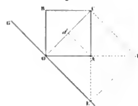

Fig. 37.


Fig. 40.

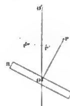

Fig. 41.


Fig. 42.

Gravé par J. Bonnier

ÉTUDES

CRISTALLOGRAPHIQUES.

ÉTUDES CRISTALLOGRAPHIQUES,

PAR M. A. BRAVAIS,

Lieutenant de vaisseau, Professeur à l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE (*).

DU CRISTAL CONSIDÉRÉ COMME UN SIMPLE ASSEMBLAGE DE POINTS.

§ I. — *De la structure interne des corps cristallisés.*

Il est admis aujourd'hui, par tous les physiciens, que les corps pondérables sont des agrégations de molécules de même espèce, tenues à distance par des forces attractives ou répulsives dont la résultante est nulle, pour chacune de ces molécules, dès que ces corps sont parvenus à leur état d'équilibre interne. Par le terme de « molécules de même espèce », on sous-entend non-seulement que la composition chimique doit être identique, mais encore que la disposition géométrique des atomes constituants est la même autour du centre de gravité de chaque molécule. Cette dernière hypothèse est nécessaire à l'explication des phénomènes de l'*isomérie;* car c'est en faisant varier le mode de groupement des mêmes atomes que l'on parvient à concevoir deux corps *isomères,* c'est-à-dire possédant, malgré leur identité de composition, des propriétés physiques et chimiques complétement distinctes. Il paraît même que le moindre défaut de superposabilité dans les polyèdres moléculaires de deux substances, par exemple la circonstance que ces polyèdres sont simplement symétriques l'un de l'autre, mais non superposables, peut suffire pour produire au dehors certaines différences plus ou moins appréciables.

(*) Présentée à l'Académie des Sciences, le 26 février 1849.

Dans les corps solides non cristallisés, l'arrangement relatif des centres des molécules ne paraît soumis à aucune règle fixe, et les lignes homologues des polyèdres moléculaires sont indistinctement dirigées vers toutes les régions de l'espace. Si l'on isole un cylindre d'une telle substance pour déterminer ses constantes spécifiques, ses coefficients de traction ou de flexion, la valeur de sa dilatation thermométrique, sa manière d'agir sur la lumière ou la chaleur, on trouve des résultats constants et indépendants de la direction qu'occupait dans l'intérieur de la masse générale l'axe du cylindre ainsi séparé. Dans les corps cristallisés, au contraire, les résultats obtenus varient, en général, suivant la direction de cet axe; une sorte de *polarité* moléculaire se manifeste, et l'on est ainsi conduit à admettre que les polyèdres moléculaires sont semblablement tournés, leurs lignes homologues étant parallèles.

Non-seulement les molécules d'un cristal sont semblables et semblablement orientées; mais elles sont, de plus, disposées en files rectilignes, et séparées l'une de l'autre, sur chaque file, par des intervalles égaux. La disposition rectiligne est indiquée par la rectitude des arêtes, et, mieux encore, par les résultats du clivage : toutes les fois qu'il existe deux plans distincts suivant lesquels le cristal peut se débiter en lames, les prismes de clivage peuvent être amenés à avoir leur section aussi petite qu'on puisse le désirer; la disposition rectiligne des molécules est la conséquence forcée d'un tel mode de subdivision (*).

L'égalité des intervalles ne résulte pas moins clairement du fait suivant, dont j'emprunte l'énoncé à M. Biot, savoir que « si, dans un cristal constitué « continûment, on isole un solide de dimensions sensibles et de configura- « tion quelconque, tous les solides pareils et parallèles à celui-là, que l'on « pourra extraire de la masse du cristal, seront identiques physiquement et « chimiquement. »

Dans la première partie de ce Mémoire, nous nous bornerons à tenir compte des positions occupées par les centres de gravité de chaque molécule, et nous réserverons pour la deuxième partie les questions relatives à la forme et à la symétrie des polyèdres moléculaires considérés en eux-mêmes.

(*) *Voyez* à ce sujet M. Delafosse, *Savants étrangers*, tome VIII, page 649.

Le cristal, ainsi réduit par la pensée, n'est plus qu'un système de points mathématiques distribués, suivant la loi de l'équidistance, sur des files rectilignes parallèles entre elles. Cette définition est précisément celle que nous avons donnée des *Assemblages* ou *Systèmes réticulaires* de points, dans un précédent travail (*).

Les arêtes du cristal, ainsi que les intersections des faces et plans de clivage, correspondent à nos *Rangées* de *Sommets;* les faces limites du cristal sont des plans contenant ces Rangées, elles coïncident avec nos *plans réticulaires :* sur chacun de ces plans, il existe un *Réseau* de centres moléculaires, trop délicat pour que notre œil puisse le percevoir, mais dont les déductions précédentes nous démontrent clairement l'existence.

Dans l'exposé de la théorie générale des Assemblages, j'ai montré que deux plans réticulaires ne se coupent pas nécessairement suivant une Rangée; ainsi l'arête d'un cristal peut ne pas être une Rangée, mathématiquement parlant. Cependant on devra remarquer que, si, par un centre moléculaire très-rapproché de l'intersection de deux faces, on imagine menés deux plans parallèles à ces faces, ces nouveaux plans, qui, pour nos organes, coïncident avec les plans précédents, vu l'excessive petitesse des espaces intermoléculaires des corps, doivent se couper suivant une des Rangées de l'Assemblage. Il n'y a donc aucun inconvénient réel à considérer les arêtes des cristaux comme étant des Rangées de molécules.

De même le point d'intersection de trois faces d'un cristal peut être pris pour un centre moléculaire, quoique, par suite du mode d'apposition des strates parallèles à ces trois faces, ce sommet puisse se trouver remplacé par une troncature, dont les dimensions infiniment petites seront d'ailleurs complétement insensibles pour nos organes.

Dans ce qui va suivre, toute face d'un cristal sera considérée comme un plan mathématique, chargé sur sa surface d'un système de centres moléculaires disposés en forme de Réseau. Toute arête sera prise pour une file rectiligne de tels centres, et chaque sommet sera censé être occupé par l'un d'eux.

(*) Sur les Systèmes de points distribués régulièrement, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIIe cahier, page 1.

§ II. — *Des sept systèmes cristallins.*

Le degré de symétrie d'un Assemblage est caractérisé par le nombre d'axes de symétrie qu'il possède, l'ordre de la symétrie de ces axes et leur situation relative. Sous ce point de vue, nous avons, dans le Mémoire déjà cité, distribué les Assemblages en sept classes distinctes. En admettant que les sept modes de symétrie correspondants se rencontrent tous dans la nature, nous aurons sept classes distinctes de substances cristallisées, c'est-à-dire sept systèmes cristallins. C'est, en effet, ce qui a lieu.

A la vérité, les minéralogistes n'en admettent ordinairement que six; mais si l'on coupe en deux le système rhomboédrique, en séparant, comme l'avait déjà fait Haüy, les cristaux qui paraissent dériver du prisme hexaèdre régulier, de ceux dont le noyau paraît être un rhomboèdre, on verra facilement que nos sept classes correspondent, terme pour terme, aux divers systèmes cristallins des minéralogistes. Le système diclinoïdrique de M. Naumann n'est qu'un cas particulier du système asymétrique, comme l'a très-bien fait remarquer M. Dufrénoy (*Traité de Minéralogie,* tome I, page 149).

Cela posé, il est évident que nos Assemblages terquaternaires (*) répondent au système régulier, ou système cubique, des cristallographes;

Que l'Assemblage sénaire fait partie du système dit rhomboédrique;

Que l'Assemblage quaternaire répond au système pyramidal, ou du prisme droit à base carrée;

Que l'Assemblage ternaire forme une classe qui, comme la classe correspondante à la symétrie sénaire, dépend du système rhomboédrique;

Que l'Assemblage terbinaire correspond au système du prisme droit à base rectangle;

Que l'Assemblage binaire forme le système dit monoclinoïdrique, ou prisme oblique rhomboïdal d'Haüy;

Enfin que l'Assemblage asymétrique se rapporte au système du prisme oblique non symétrique.

La même division de nos Assemblages en modes divers, hexaédral, octa-

---

(*) Mémoire cité, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIII[e] cahier, page 88.

édral, etc., est évidemment applicable à la division des cristaux appartenant à un même système cristallin.

On verra, dans l'un des paragraphes suivants, comment, au moyen de la loi dite « loi de symétrie », qui exige que les plans réticulaires, ou faces, de même espèce existent simultanément sur le contour du cristal, on peut retrouver les axes et plans de symétrie de l'Assemblage cristallin, et, par conséquent, dire à quel système il appartient.

La détermination du mode cristallin offre plus de difficultés; car il résulte du théorème LXXXII de mon Mémoire sur les Systèmes de points que les mêmes plans réticulaires, avec les mêmes angles d'inclinaison mutuelle, peuvent exister, comme faces du cristal, quel que soit le mode auquel on rapporte ce dernier. Ainsi l'inspection des arêtes et faces d'un échantillon unique d'une espèce minérale, dont le système cristallin est donné, ne suffit pas pour faire discerner le mode cristallin propre à cette espèce.

Nous verrons plus tard que cette indécision peut être levée, dans un grand nombre de cas, par l'examen d'un nombre un peu considérable d'échantillons de la même espèce, ou par la considération des inégales résistances au clivage parallèlement aux diverses faces.

De plus, en vertu du scolie du théorème LXXXII, il existe, entre les classes sénaire et ternaire, une indétermination analogue à celle que présentent deux modes appartenant à un système cristallin à plusieurs modes, et l'inspection d'un seul échantillon pourra bien ne pas suffire à la détermination du système. Cependant les lois générales de la symétrie extérieure, lois dont nous aurons à parler bientôt, pourront, dans le plus grand nombre de cas, faire disparaître cette incertitude.

§ III. — *Des formes cristallines et de la loi de symétrie.*

L'illustre Haüy a remarqué que les faces d'une espèce minérale s'associaient suivant certaines règles, et il a désigné sous le nom de *faces identiques* celles qui, ainsi associées, paraissent ou disparaissent à la fois dans l'enveloppe polyédrique du cristal. Haüy a cherché la condition de coexistence de ces faces dans la similitude de leur mode de génération sur toutes les parties *identiques* d'un noyau central qu'il appelle la *forme primitive*

de la substance : il reconnaît l'*identité*, pour les arêtes, à l'égalité de longueur et à l'égale inclinaison de leurs angles dièdres; pour les angles solides, à l'égalité de leurs parties élémentaires et à l'égale longueur de leurs côtés.

Les géomètres qui ont suivi les méthodes allemandes déterminent les faces coexistantes en supposant qu'un, deux, ou trois des segments interceptés par l'une de ces faces sur trois axes cristallographiques changent de direction en restant sur le même axe, ou en passant sur un autre axe de même paramètre, sous la condition, toutefois, que le nouvel angle trièdre compris entre les segments soit égal ou géométriquement symétrique à l'angle trièdre primitif.

Ces règles résultent d'une étude très-approfondie d'un nombre immense d'espèces minérales; mais elles sont empiriques, et la cause physique de la coexistence n'en ressort pas d'une manière bien nette. Il en est résulté que, dans la pratique, ces règles ne se sont pas toujours trouvées d'accord; ainsi, les douze faces d'un birhomboèdre formé sur les arêtes des bases d'un prisme hexaèdre régulier sont coexistantes, d'après la théorie de Haüy; mais, suivant les méthodes cristallographiques de M. Miller, ces douze faces appartiennent à deux associations distinctes qui peuvent exister séparément.

D'autre part, M. Delafosse a parfaitement fait voir (Mémoire cité, p. 654) que la condition d'identité géométrique, dans les diverses parties de la forme primitive, pouvait ne pas être suffisante, et qu'ainsi on ne pouvait rationnellement baser la loi de coexistence sur cette identité géométrique.

Ces difficultés disparaissent lorsqu'on assimile les cristaux à des Assemblages de molécules.

Nous distinguerons sous le nom de *faces de même espèce*, comme nous l'avons fait dans la théorie des Assemblages, celles qui peuvent être amenées à superposition, Réseau sur Réseau, par une rotation ou translation convenable, la superposition des faces entraînant avec elle celle des Assemblages. Si, de plus, cette superposition entraîne aussi celle des polyèdres moléculaires que l'on peut supposer liés aux plans de ces faces et participant à leurs mouvements, nous dirons que ces faces sont de même espèce, et, de plus, *identiques*.

La loi de coexistence des faces, généralement désignée sous le nom de *loi de symétrie*, consistera dans la nécessité de la formation simultanée de toutes les faces de même espèce avec une face donnée. Appliquée au cas du clivage, cette loi exigera que le cristal, pouvant se cliver parallèlement à un certain plan réticulaire, se clive aussi, et avec la même facilité, parallèlement à tous les plans réticulaires de même espèce que le précédent.

La raison physique de la loi précédente est que, dans l'acte de la cristallisation, deux faces de même espèce se présentant, en général, de la même manière au milieu générateur, et leur tissu sous-jacent étant le même, les forces moléculaires qui décident l'apposition successive des strates parallèles à l'une d'elles se retrouvent les mêmes dans la formation des strates parallèles à la deuxième. Mais la nature de cet énoncé fait concevoir que, même indépendamment des causes étrangères qui peuvent agir inégalement sur les flancs de la masse cristalline en voie de formation et y déterminer des avortements accidentels, les forces productrices des faces de même espèce ne peuvent être complétement pareilles des deux parts, que si les faces sont, non-seulement de même espèce, mais identiques.

Il convient, toutefois, pour procéder du simple au composé, d'admettre provisoirement la loi de la coexistence des faces de même espèce, sans tenir compte de la forme du polyèdre moléculaire. Nous verrons ensuite comment la prise en considération de la forme de ces polyèdres oblige à réduire dans un certain rapport le nombre des faces qui doivent théoriquement coexister.

On a désigné sous le nom de *forme cristalline* l'ensemble de toutes les faces qui doivent coexister à une face donnée. Une *forme* sera donc la réunion de toutes les faces de même espèce que la face donnée. Une forme peut suffire à clore le cristal, et elle est dite alors *forme fermée;* elle est dite *ouverte* dans le cas contraire.

Le nombre des faces d'une forme dépend du nombre des axes du système, et l'on pourra toujours le déterminer de la manière suivante. Soit N_q le nombre d'axes de symétrie d'ordre q que possède le cristal. Une première face étant donnée, la symétrie propre à chacun de ces axes donnera naissance à $q-1$ autres faces dérivant de la face donnée par des rotations répétées,

de $\frac{360°}{q}$ autour de cet axe (*); le nombre total des faces ainsi obtenues, non compris la face initiale, sera donc $(q-1)\,N_q$. Pour se rendre compte de leur mode de distribution, on élèvera des normales sur le côté externe de chaque face, et on les prolongera, ainsi que les axes de symétrie, jusqu'à la surface d'une sphère de très-grand rayon dont le cristal occupe le centre; puis, de chaque extrémité d'axe, comme pôle, on décrira des petits cercles passant par le pôle de la face donnée, et sur lesquels viendront se ranger les pôles de toutes les faces de même espèce, homologues par rapport à cet axe. La représentation graphique des positions de ces points sur la *sphère de projection* est fort utile en cristallographie.

En répétant la précédente opération sur les axes d'ordre q', d'ordre q'', on obtiendra le nombre total des faces ainsi associées, puisque deux plans réticulaires de même espèce sont toujours homologues par rapport à un axe de symétrie (théorème LXXXVII); ce nombre total sera donc

$$1+(q-1)\,N_q+(q'-1)\,N_{q'}+(q''-1)\,N_{q''}.$$

Mais la forme n'est point encore complète; car, à chacune de ces faces en correspond une autre qui lui est parallèle, mais qui est située sur le côté opposé du cristal; cette face doit aussi appartenir à la même forme. Donc on devra multiplier par 2 le nombre ainsi obtenu, et comme d'ailleurs q, q', q'' ne peuvent être égaux qu'à 6, 3, 4 ou 2, on pourra énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME I. — *Le nombre* N *des faces d'une forme complète, dans un système cristallin contenant* N_6 *axes sénaires,* N_4 *axes quaternaires,* N_3 *axes ternaires,* N_2 *axes binaires, sera donné par la formule*

$$N = 2\,(1+5\,N_6+3\,N_4+2\,N_3+N_2). \tag{1}$$

En appliquant cette formule, et employant les valeurs de N_6, N_4, N_3, N_2, fournies par le tableau de la page 91 de mon précédent Mémoire, on trouvera:

1er système cristallin, $N=48$;	5e système cristallin, $N=8$;
2e système cristallin, $N=24$;	6e système cristallin, $N=4$;
3e système cristallin, $N=16$;	7e système cristallin, $N=2$.
4e système cristallin, $N=12$;	

(*) Théorème LXXXVIII de mon précédent Mémoire.

Lorsqu'il s'agit de corps cristallisés, la figure du corps étant celle d'un polyèdre terminé et convexe, la limitation de l'Assemblage introduit un élément nouveau, la *bilatéralité des faces*, et il est nécessaire d'en tenir compte. En effet, chaque face d'un cristal a un côté interne et un côté externe, et l'on peut concevoir que la même distinction de sens soit appliquée aux parties de la face que l'on prolonge par la pensée au delà de l'aire polygonale par laquelle elle s'applique sur le cristal.

Nous dirons désormais que « deux faces de même espèce sont *directement semblables* », lorsque la rotation qui établit la coïncidence de leurs Réseaux amène le côté interne de l'une sur le côté interne de l'autre : il est facile de voir que les polygones par lesquels ces faces sont en contact avec le cristal se projettent alors sur l'axe qui a servi à effectuer cette rotation, *dans l'intérieur même de la masse cristalline*. Au contraire, ces deux faces seront dites *inversement semblables*, si le mouvement qui fait coïncider les deux Réseaux prolongés au besoin, amène le côté interne de l'une des faces sur le côté externe de l'autre; dans ce cas, l'axe de la rotation est situé *en dehors du cristal*.

Cette définition montre que deux faces homologues par rapport à un plan de symétrie sont toujours inversement semblables : car alors la masse du cristal est toujours comprise entre les parties homologues des deux faces, le biseau de l'angle dièdre formé par ces faces est extérieur au cristal, ou du moins placé à sa limite; l'axe binaire autour duquel une rotation de 180 degrés doit avoir lieu pour produire la superposition de ces faces, étant normal à ce plan de symétrie et s'appuyant sur l'un des points de ce biseau, sera nécessairement extérieur au cristal.

Toute face parallèle à une face donnée lui est inversement semblable; car leur superposition, par simple translation, amène le côté interne de l'une sur le côté externe de l'autre. De même, toute face A directement semblable à une face B, sera inversement semblable à la face parallèle à la face B. Plus généralement, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Deux faces directement semblables ou inversement semblables à une troisième sont directement semblables entre elles; et deux faces sont inversement semblables, si l'une d'elles est directement semblable à une troisième, et si l'autre lui est inversement semblable.*

En résumé, toute forme cristalline se décompose en

Une face A primitivement donnée, et que je nommerai la *face déterminante de la forme;*

$5N_6 + 3N_4 + 2N_3 + N_2$ faces directement semblables à A;

Une face A′ parallèle à A et qui lui est inversement semblable;

$5N_6 + 3N_4 + 2N_3 + N_2$ faces directement semblables à A′ et inversement semblables à A.

Ainsi toute forme se décompose en deux demi-formes:

Une *demi-forme directe,* composée de $1 + 5N_6 + 3N_4 + 2N_3 + N_2$ faces toutes directement semblables entre elles;

Une *demi-forme inverse,* composée d'un pareil nombre de faces, toutes directement semblables entre elles, mais inversement semblables aux faces de la demi-forme directe, et parallèles deux par deux à ces dernières.

Dans le cas où la forme se compose de plans de clivage, il n'y a plus lieu de distinguer les côtés interne ou externe des faces, et le nombre des plans qui constituent *la forme de clivage* est simplement égal à $1 + 5N_6 + 3N_4 + 2N_3 + N_2$.

La valeur du nombre N indiquée par l'équation (1) se rapporte au cas général où la face déterminante A, qui sert de départ à la forme cristalline, n'offre aucune particularité de position, relativement aux axes de symétrie; alors la forme sera dite *forme oblique*.

Dans le cas contraire, il pourra arriver que sur les N faces qui composent la forme oblique, deux ou plusieurs se confondent en une seule. Le nombre N se réduisant alors à l'un de ses sous-multiples, il se produit une *forme restreinte,* moins riche en faces que la forme oblique, mais dont la symétrie est néanmoins tout aussi complète. Je reviendrai sur ce sujet dans le § VI.

§ IV. — *De la dérivation des faces et du choix des axes coordonnés.*

La surface extérieure d'un cristal appartient quelquefois à une seule forme cristalline, mais, le plus souvent, à deux ou plusieurs formes différentes. Une face d'une forme étant donnée, toutes les autres faces de la forme en résultent; mais cela ne nous apprend pas quelles sont les autres formes

qui ont pu s'associer à la précédente, pour contribuer avec elle à clore le cristal.

Il existe, à cet égard, certaines règles auxquelles la nature se plie, et qui permettent de faire dériver toutes les faces et formes possibles du cristal, une fois que l'observation a fait connaître, pour chaque espèce minérale, certaines constantes qui lui sont propres.

Cette dérivation des faces a été jusqu'ici obtenue, soit par la méthode des décroissements ou méthode moléculaire, soit par la méthode des troncatures rationnelles ou méthode géométrique.

Dans la première méthode, due à Bergmann et Haüy, on choisit un certain parallélipipède comme noyau du cristal, et l'on assemble face à face ces parallélipipèdes de manière à produire des lames qui se superposent, chaque lame reculant sans cesse de la même quantité sur les bords de son contour, par rapport à celle qui la précède. Dans chaque lame, l'apposition des parallélipipèdes produit des files parallèles qui sont également placées en retrait l'une par rapport à l'autre. Les dimensions du noyau sont les constantes qu'il s'agit de déterminer une fois pour toutes, et il ne reste plus qu'à faire varier les lois d'apposition de ces parallélipipèdes que Haüy avait désignés sous le nom de *molécules soustractives,* pour obtenir toutes les faces possibles du cristal. On démontre que, dans ce cas, tout plan parallèle à la face qui passe par les sommets restés exempts d'appositions latérales, tronque les trois arêtes de l'un des angles du noyau suivant des segments proportionnels à certains sous-multiples simples des longueurs primitives des arêtes. C'est en faisant varier les rapports de ces sous-multiples entre eux que l'on obtient toutes les faces possibles.

Dans la méthode des troncatures rationnelles, on choisit trois droites se coupant au même point, dans l'intérieur du cristal, et sur ces droites on porte trois longueurs a, b, d nommées *paramètres*. Les grandeurs a, b, d et les angles qui fixent leur position relative sont les constantes spécifiques que l'observation doit faire connaître; elles restent les mêmes pour tous les échantillons d'une même espèce minérale, mais varient d'une espèce à une autre espèce : ces droites, désignées en général sous le nom d'axes cristallographiques, sont le plus souvent des axes de symétrie du cristal. Alors la loi de dérivation des faces peut être énoncée de la manière suivante : « Prenez

« sur les axes des longueurs respectivement égales à

$$\frac{1}{g}a, \quad \frac{1}{h}b, \quad \frac{1}{k}d,$$

« g, h, k étant des nombres entiers susceptibles de devenir négatifs dans le « cas où le segment devrait être compté en sens inverse du paramètre; le « plan mené par les trois extrémités de ces segments sera l'une des faces « possibles du cristal. »

Si l'un des nombres g, h, k devenait nul, le segment correspondant deviendrait infini, et le plan de la face serait parallèle à l'un des trois axes.

La face est alors désignée par la notation symbolique (ghk). Ainsi la loi de dérivation des faces consiste dans la variation illimitée des nombres entiers g, h, k qui sont appelés les *caractéristiques* de la face.

Non-seulement ces deux modes de dérivation coïncident quant aux résultats; mais, en outre, ils sont évidemment identiques avec le mode de dérivation de nos *plans réticulaires*. En effet, un Assemblage étant rapporté à trois Rangées conjuguées comme axes, et a, b, d étant les paramètres de ces Rangées, l'équation générale des plans réticulaires est, en coordonnées linéaires,

$$g\frac{\xi}{a} + h\frac{\eta}{b} + k\frac{\zeta}{d} = C, \tag{2}$$

g, h, k étant les trois caractéristiques du plan réticulaire (ghk). Si donc nous faisons coïncider les axes coordonnés de notre Assemblage, avec les axes cristallographiques des minéralogistes allemands, si de part et d'autre nous prenons les mêmes paramètres, et si nous assignons à g, h, k les mêmes valeurs, le plan de l'équation (2) qui coupe les axes aux distances $\frac{C}{g}a$, $\frac{C}{h}b$, $\frac{C}{k}d$ de l'origine, coïncidera, quant à sa direction, avec la face qui a pour symbole (ghk) dans le système des troncatures rationnelles.

Ainsi nos plans réticulaires de symbole (ghk) sont précisément les plans sécants à troncatures rationnelles de la cristallographie allemande, plans auxquels MM. Frankenheim, Whewel et Miller ont assigné la même notation symbolique (ghk); ce sont aussi les faces de décroissement de la théorie d'Haüy. M. Miller a représenté, en outre, par le symbole $\{ghk\}$ l'ensemble de toutes les faces qui s'associent à la face (ghk) pour constituer une forme

complète dans un système cristallin désigné d'avance. Nous conserverons cette notation, qui sera l'expression abrégée des symboles des N faces qui composent la forme (*voyez* ci-dessus, page 108).

Je représenterai aussi avec M. Miller par $\varkappa\{ghk\}$ la demi-forme directe correspondant à (ghk), et par $\varkappa\{\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{k}\}$ sa demi-forme inverse.

Il convient maintenant de faire, dans chacun de nos sept systèmes cristallins, un choix convenable des axes coordonnés auxquels nous devrons rapporter les faces des cristaux. Nous adopterons, autant que cela sera possible, trois des axes de symétrie du système. Toutefois cela n'est pas indispensable, et M. Miller a décrit le système ternaire (système rhomboédrique), en prenant pour axes coordonnés les arêtes du rhomboèdre générateur, lignes qui ne sont point des axes de symétrie du cristal.

Dans tous les systèmes cristallins, sauf le premier et le dernier, il existe au moins un axe de symétrie principal (*voyez* le tableau de la page 93 du Mémoire sur les Systèmes de points).

Je supposerai toujours cet axe placé verticalement, et je le prendrai pour axe des ordonnées linéaires ζ, et des ordonnées numériques z qui leur correspondent. Dans le système terquaternaire, où il existe trois axes quaternaires, l'un d'eux, arbitrairement choisi, sera considéré comme étant l'axe des z.

Lorsqu'il se présentera plusieurs modes cristallins dans un même système, on se guidera, pour le choix des axes, sur la convenance du mode hexaédral, dont tous les autres modes dérivent ensuite avec facilité par des centrages convenables, et qui offre, de plus, cette circonstance remarquable, que les trois arêtes de son hexaèdre générateur sont des Rangées conjuguées de l'Assemblage.

Dans le cinquième système, qui renferme deux modes hexaédraux, l'un à base rectangle, l'autre à base rhombe, c'est le mode à base rectangle qui devra servir de point de départ.

Système terquaternaire. — On prendra pour axes coordonnés les trois arêtes du cube servant de noyau au mode hexaédral. Les axes des x, y, z sont alors rectangulaires entre eux; les trois paramètres sont égaux et représentés par a, a, a. Les axes coordonnés sont les axes quaternaires de l'Assemblage.

Nous verrons bientôt qu'on peut substituer aux axes quaternaires les quatre

axes ternaires de l'Assemblage; mais cette substitution ne devra se faire qu'exceptionnellement, attendu qu'elle mène en général à des résultats moins simples.

Système sénaire. — Les mêmes axes que pour le système ternaire qui en dérive par le procédé indiqué à la page 73 de mon Mémoire sur les Systèmes de points.

Système quaternaire. — Les trois arêtes du prisme droit à base carrée, qui forme le solide générateur du mode hexaédral, seront prises pour axes coordonnés. On prendra, pour axe des z, l'axe quaternaire; pour axes des x et des y, les deux axes binaires *de première espèce;* les paramètres sont a, a, d, sur ces axes. Le paramètre des axes de seconde espèce est $a\sqrt{2}$.

Système ternaire. — On peut, avec M. Miller, prendre pour axes coordonnés les trois arêtes du rhomboèdre générateur.

On peut appliquer ce même système d'axes au système sénaire qui en dérive, puisque les plans réticulaires sont les mêmes de part et d'autre.

Toutefois, il faut remarquer que les douze faces, qui, réunies, constituent la *forme la plus générale* du système ternaire (voyez *Cristallographie,* de Miller, trad. française, page 77), ne représentent pas la forme complète du système sénaire : pour obtenir les douze autres faces, on doit faire tourner de 180 degrés les faces de la forme $\{ghk\}$ autour de l'axe sénaire.

Dans le système de M. Miller, les axes coordonnés étant parallèles aux arêtes du rhomboèdre générateur, on trouve facilement que le plan (ghk), tournant de 180 degrés autour de l'axe de symétrie ternaire, vient coïncider avec un plan réticulaire de notation $(g'h'k')$, g', h', k' étant des nombres entiers déterminés par les formules suivantes (*Cristallographie,* § 133) :

$$(5)\qquad \begin{cases} -g+2h+2k=g', \\ 2g-h+2k=h', \\ 2g+2h-k=k'; \end{cases}$$

ainsi les formes à douze faces $\{ghk\}$, $\{g'h'k'\}$ s'associeront entre elles pour constituer la forme la plus générale du système sénaire.

Mais il est préférable, comme nous le dirons bientôt, de prendre pour axe des z, dans les systèmes sénaire et ternaire, l'axe principal du système, et

pour axes des x et des y, deux des trois axes binaires de première espèce qui se croisent à son pied dans le plan qui lui est normal: le paramètre de l'axe des z est alors égal à d; celui des axes des x et des y est égal à a.

Système terbinaire. — On prendra pour axes les trois arêtes du parallélipipède rectangulaire qui forme le solide générateur du mode hexaédral rectangle. Les axes coordonnés coïncident alors avec les trois axes de symétrie, et sont, en même temps, des Rangées conjugées de ce mode cristallin. Les paramètres sont inégaux, et représentés par a, b, d: l'axe des z est supposé vertical, et considéré comme étant l'axe principal du système.

Système binaire. — On prendra pour axe des z l'axe binaire, et on le placera verticalement. Cet axe est une des arêtes du prisme droit qui, dans le mode hexaédral, forme le solide générateur de l'Assemblage; il est donc normal au plan des xy; son paramètre sera représenté par d. Les axes des x et des y sont deux Rangées conjuguées quelconques du Réseau tracé sur ce plan; elles font entre elles un angle égal à δ, et leurs paramètres sont égaux à a et à b.

Système asymétrique. — Trois Rangées conjuguées quelconques se coupant en un même Sommet peuvent être prises pour axes coordonnés. Les paramètres, sur les axes des x, des y et des z, continueront à être représentés par a, b, d; les angles plans formés par ces mêmes axes entre eux, sur les plans des yz, des xz et des xy, par α, β et δ; enfin les angles dièdres opposés à ces angles plans par μ, ν, ϖ.

Quoique nous adoptions en général les axes coordonnés dont s'est servi M. Miller, on verra, dans le paragraphe suivant, que nous nous écartons de la méthode du savant professeur pour les systèmes sénaire, ternaire et binaire.

§ V. — *Des notations cristallographiques.*

Nous avons vu que le symbole (ghk) représentait la série des plans réticulaires parallèles, dont l'équation est

$$g\frac{\xi}{a} + h\frac{\eta}{b} + k\frac{\zeta}{d} = \mathrm{C},$$

ou, plus simplement, en coordonnées numériques,

$$gx + hy + kz = \mathrm{C}. \tag{6}$$

Pour pouvoir distinguer l'une de l'autre la face (ghk) et la parallèle située de l'autre côté du cristal, M. Miller représente cette dernière par $(-g, -h, -k)$, ou, mieux encore, par le symbole $(\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{k})$; cela revient à supposer que l'origine des coordonnées est située dans l'intérieur du cristal, et que le nombre C est essentiellement positif. Cette convention sera admise dans tout ce qui va suivre.

Le système de notations imaginé par M. Weiss, et adopté par la plupart des cristallographes allemands, consiste à écrire, sous forme de progression géométrique, les trois distances auxquelles la face considérée, ou une de ses parallèles, coupe les trois axes, à partir de l'origine. Ainsi, a, b, d étant les trois paramètres, si le segment intercepté sur l'axe des x est ma, si celui relatif à l'axe des y est nb, si celui relatif à l'axe des z est pd, la notation de la face sera

$$ma : nb : pd.$$

En vertu du principe des troncatures rationnelles, m, n, p sont des nombres entiers ou fractionnaires, susceptibles de devenir infinis, mais jamais égaux à zéro.

L'expression symbolique ci-dessus équivaut à l'équation

$$(7) \qquad \frac{\xi}{ma} + \frac{\eta}{nb} + \frac{\zeta}{pd} = 1.$$

Si l'on réduit les trois facteurs $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ au même plus petit dénominateur commun C, et si l'on pose

$$(8) \qquad \frac{1}{m} = \frac{g}{C}, \quad \frac{1}{n} = \frac{h}{C}, \quad \frac{1}{p} = \frac{k}{C},$$

g, h, k étant des nombres entiers dépourvus de commun diviseur, on aura

$$g\frac{\xi}{a} + h\frac{\eta}{b} + k\frac{\zeta}{a} = C,$$

ce qui nous ramène à la face de symbole (ghk).

Ainsi les trois formules

$$ma : nb : pd, \quad \frac{1}{g}a : \frac{1}{h}b : \frac{1}{k}d, \quad (ghk),$$

sont équivalentes. Mais, quoique la notation de M. Weiss ait été un progrès

réel sur celle d'Haüy, la nouvelle notation est encore préférable, attendu que les caractéristiques g, h, k s'introduisent plus facilement dans les calculs que leurs inverses $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, de même qu'en trigonométrie, il est plus facile d'opérer sur des sinus et sur des cosinus que sur des cosécantes ou des sécantes.

Je ne parlerai pas des autres notations cristallographiques adoptées par divers auteurs. M. Miller a traité d'une manière complète de ces transformations de notations, dans l'un des chapitres de sa *Cristallographie,* et je ne puis mieux faire que d'y renvoyer mes lecteurs.

Mais je ne puis passer sous silence les notations à quatre caractéristiques dont l'emploi généralisé peut rendre de grands services au cristallographe. Imaginées d'abord par M. Weiss, dans le but d'appliquer ses symboles aux cristaux rhomboédriques, elles ont été employées par M. Frankenheim, dans un intéressant Mémoire publié par le journal *l'Isis,* en 1826.

Dans ce nouveau système, le premier axe ou axe principal des cristaux rhomboédriques est l'axe ternaire de paramètre d; les trois autres axes sont trois droites situées dans le plan normal à l'axe principal et inclinées l'une sur l'autre sous des angles de 60 degrés; les paramètres de ces axes sont a, a, a, de sorte que la notation d'une face quelconque est alors

$$ma : na : qa : pd,$$

m, n, q, p étant des nombres entiers ou fractionnaires.

Mais avant d'appliquer ce mode de notation aux systèmes cristallins, il convient de généraliser la définition des *caractéristiques* donnée à la page 39 de mon Mémoire sur les Systèmes de points. La caractéristique d'un plan (ghk) par rapport à un axe quelconque, ou Rangée, de paramètre d sera désormais « le nombre par lequel doit être divisé le paramètre d pour obtenir « le segment intercepté sur cet axe par deux plans limitrophes appartenant « à la série (ghk). »

A ce point de vue, la caractéristique g relative à l'axe des x est le nombre par lequel doit être divisé le paramètre a pour obtenir le segment qu'intercepte sur cet axe, à partir de l'origine, le plan

$$gx + hy + kz = 1,$$

et il en est de même pour les caractéristiques h et k.

Soit en général G la caractéristique du plan réticulaire (ghk) par rapport à l'axe qui joint l'origine au Sommet dont les coordonnées numériques sont (m, n, p) : il résulte de la solution du problème XXVII (Mémoire sur les Systèmes de points) que l'on aura

$$G = gm + hn + kp. \tag{9}$$

Si le plan (ghk) est parallèle à la Rangée mnp, on aura

$$gm + hn + kp = 0,$$

et la caractéristique du plan, par rapport à la Rangée prise pour axe coordonné, sera égale à zéro.

Aux trois axes coordonnés nécessaires pour fixer la position des points, lignes ou plans de l'Assemblage, rien n'empêche de joindre un quatrième axe coordonné que je nommerai l'*axe auxiliaire*, et qui ira de l'origine au Sommet dont les cordonnées sont $(-1, -1, -1)$. Je nommerai e le paramètre de ce nouvel axe; la caractéristique des plans réticulaires par rapport à ce même axe sera en général représentée par la lettre l, l'ordonnée numérique des Sommets rapportés à cet axe sera désignée par s. Il conviendra de remplacer le symbole (ghk) par le nouveau symbole $(ghkl)$, et l'équation du plan réticulaire limitrophe à celui qui contient l'origine pourra s'écrire indifféremment

$$\left\{\begin{array}{l} gx + hy + kz = 1, \\ gx + hy + ls = 1, \\ gx + kz + ls = 1, \\ hy + kz + ls = 1, \end{array}\right. \tag{10}$$

attendu que les axes des x, des y, des z et des s sont conjugués trois à trois. Enfin on devra se rappeler que g, h, k, l sont liées entre elles par la relation

$$g + h + k + l = 0, \tag{11}$$

qui est la formule (59) de mon Mémoire sur les Systèmes de points.

Au lieu de prendre pour axe auxiliaire celui qui aboutit au point $(-1, -1, -1)$, on peut choisir la Rangée allant de l'origine au point $(-1, -1, 0)$, nommer c le paramètre de ce nouvel axe, t les coordonnées des Sommets mesurées parallèlement à cet axe, et i les caractéristiques des plans réticulaires par rapport à ce même axe. Alors il conviendra de remplacer le symbole (ghk) par le nouveau symbole $(ghik)$, et l'équation du plan réticulaire limitrophe à celui qui contient l'origine pourra s'écrire sous l'une des trois formes suivantes :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} gx + hy + kz &= 1, \\ gx + it + kz &= 1, \\ hy + it + kz &= 1. \end{aligned} \right.$$

On devra se rappeler que g, h, i sont liées entre elles par la condition

$$(13) \qquad g + h + i = 0,$$

qui est la formule (21) de mon Mémoire sur les Systèmes de points.

Les axes des x, des y et des t forment alors trois Rangées conjuguées deux à deux sur le plan des xy.

Notation à quatre caractéristiques dans le système terquaternaire. — Lorsqu'on veut appliquer cette notation à ce système, il faut supposer l'Assemblage construit d'après le mode hexaédral, et le rapporter à ses quatre axes ternaires.

Prenons donc pour axes coordonnés quatre Rangées allant de l'origine aux points $(1, 1, \bar{1})$, $(1, \bar{1}, 1)$, $(\bar{1}, 1, 1)$, $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$. D'après les formules générales de la transformation des symboles (problème XXVII), le plan (ghk) devient, dans le nouveau système d'axes,

$$(g + h - k,\ g - h + k,\ -g + h + k,\ -g - h - k) = (\mathrm{GHKL}).$$

La demi-forme directe correspondant à la face (GHKL) se compose alors des vingt-quatre permutations obtenues en échangeant entre elles les caractéristiques. En changeant les signes de toutes les caractéristiques à la fois, on aura la demi-forme inverse correspondante.

Les six faces du cube sont alors représentées par $\{1\,1\,\bar{1}\,\bar{1}\}$,

Les huit faces de l'octaèdre régulier par $\{1\,1\,1\,\bar{3}\}$,

Les douze faces du dodécaèdre rhomboïdal par $\{1\,0\,0\,\bar{1}\}$,

Les vingt-quatre faces du tétrakishexaèdre par $\{GH\bar{G}\bar{H}\}$, etc.

Notation à quatre caractéristiques dans le système sénaire. — Prenons l'axe sénaire Oz (*fig.* 1) pour axe des z, et supposons-le placé verticalement. Parmi les six Sommets de l'hexagone régulier GI'HG'IH' qui enveloppe l'origine O sur le plan horizontal, choisissons les trois Sommets alternants G, H, I; prenons OG pour axe des x positives, OH pour axe des y positives, et OI pour axe auxiliaire, ou axe des coordonnées t : ces lignes sont les axes binaires de première espèce de l'Assemblage, et leur paramètre sera désigné par a.

Le symbole d'un plan réticulaire quelconque sera $(ghik)$ dans ce système d'axes, les caractéristiques g, h, i étant liées par l'équation de condition (13).

Pour trouver toutes les faces appartenant à la même forme que la face déterminante $(ghik)$, on remarquera qu'en faisant tourner $(ghik)$ de 60 degrés autour de Oz, en allant de Ox vers Oy, les segments $\frac{a}{g}, \frac{a}{h}, \frac{a}{i}$ passent de OG, OH, OI sur les droites OI', OG', OH'; d'où l'on voit que l'on obtient ainsi la face $(\bar{h}\,\bar{i}\,\bar{g}\,k)$, et de celle-là on déduira toutes les faces homologues de $(ghik)$ relativement à l'axe sénaire, en faisant passer la première caractéristique au troisième rang, et changeant en même temps les trois premiers signes.

Si l'on fait ensuite tourner $(ghik)$ de 180 degrés autour de l'axe des x, on obtiendra la face $(gih\bar{k})$, et l'on obtiendrait de même $(ihg\bar{k})$, $(hgi\bar{k})$ en faisant tourner la même face de 180 degrés autour de l'axe des y et autour de l'axe des z; on obtient ainsi le système des homologues de $(ghik)$ par rapport aux axes binaires de première espèce.

On obtiendra de même les homologues par rapport aux axes binaires de deuxième espèce.

Après avoir obtenu les douze faces de la demi-forme directe, on aura, par un changement simultané de tous les signes, les douze faces de la demi-forme inverse. Le diagramme complet des vingt-quatre faces de la forme la plus

générale du système sénaire sera donc

$$
(14)\quad
\left\{
\begin{aligned}
x\{ghik\} &= \begin{matrix} ghik & \bar h\bar i\bar g k & gih\bar k & \bar h\bar g\bar i\bar k \\ ighk & \bar g\bar h\bar i k & ihg\bar k & \bar g\bar i\bar h\bar k, \\ higk & \bar i\bar g\bar h k & hgi\bar k & \bar i\bar h\bar g\bar k \end{matrix} \\[1em]
x\{\bar g\bar h\bar i\bar k\} &= \begin{matrix} \bar g\bar h\bar i\bar k & hig\bar k & \bar g\bar i\bar h k & hgik \\ \bar i\bar g\bar h\bar k & ghi\bar k & \bar i\bar h\bar g k & gihk. \\ \bar h\bar i\bar g\bar k & igh\bar k & \bar h\bar g\bar i k & ihgk \end{matrix}
\end{aligned}
\right.
$$

Je reviendrai sur ce sujet, en traitant de l'influence qu'exerce le polyèdre moléculaire sur la figure des formes cristallines.

Notation à quatre caractéristiques dans le système ternaire. — On devra, dans le diagramme précédent, conserver parmi les faces directement semblables à $(ghik)$, celles-là seulement qui proviennent de rotations de 120 degrés autour de l'axe principal, c'est-à-dire $(ighk)$ et $(higk)$, et celles qui résultent de rotations de 180 degrés autour des droites OG, OH, OI de la *fig.* 1, droites qui, dans le système ternaire, continuent à être des axes binaires de l'Assemblage.

Il en résulte que, prenant toujours ces droites pour axes des x, des y et des t, on aura, pour le diagramme de la forme qui comprend toutes les faces de même espèce que $(ghik)$,

$$
(15)\quad
\left\{
x\{ghik\} = \begin{matrix} ghik & gih\bar k \\ ighk & ihg\bar k, \\ higk & hgi\bar k \end{matrix}
\right.
\qquad
x\{\bar g\bar h\bar i\bar k\} = \begin{matrix} g\bar h\bar i\bar k & \bar g\bar i\bar h k \\ \bar i\bar g\bar h\bar k & \bar i\bar h\bar g k. \\ \bar h\bar i\bar g\bar k & \bar h\bar g\bar i k \end{matrix}
$$

Ici la forme $\{ghik\}$ est essentiellement distincte de la forme $\{ghi\bar k\}$. En permutant entre elles les trois premières caractéristiques, il faut remarquer que, si l'on veut rester dans la même forme cristalline, « toute permutation *non* « *circulaire* (*) des trois premières caractéristiques doit être accompagnée du « changement de signe de ces caractéristiques ou de la dernière », et récipro-

(*) Une permutation entre n lettres $abcde\ldots kl$ est dite circulaire, si, les lettres étant écrites aux sommets d'un polygone de n côtés, on les compte dans leur ordre naturel, à partir de l'une d'elles prise arbitrairement; les permutations circulaires de $abcd\ldots kl$ sont donc $bcd\ldots kla$, $cd\ldots klab$, etc.

« quement, que « tout changement de signe, soit des trois premières carac-
« téristiques à la fois, soit de la dernière seule, doit être accompagné d'une
« permutation non circulaire des trois premières caractéristiques. » Il est facile d'en conclure que toute forme du système ternaire peut être représentée par l'expression symbolique $\{g, h, \overline{g+h}, k\}$, dans laquelle g, h, k sont des nombres positifs ou au moins égaux à zéro. La face $(g, h, \overline{g+h}, k)$ sera dite alors la *face déterminante* de la forme.

La forme $\{h, g, \overline{g+h}, k\}$ pourra être appelée la forme *hémitropique* de la forme $\{g, h, \overline{g+h}, k\}$, puisqu'on passe de l'une à l'autre par une rotation de 180 degrés autour de l'axe principal, et $(h, g, \overline{g+h}, k)$ sera sa face déterminante.

Une face étant donnée, et son symbole étant (ghk) dans le système d'axes coordonnés adoptés par M. Miller pour les cristaux rhomboédriques, on peut demander ce que deviendra ce symbole dans le système des notations à quatre caractéristiques.

Soient (*fig.* 2) O l'origine, O Gx, O Hy, O It les trois axes coordonnés des x, des y et des t, axes binaires de l'Assemblage, et XYZ le triangle élémentaire, dans le plan réticulaire le plus voisin du plan GHI. Les droites inclinées OX, OY, OZ sont les axes des x, des y et des z dans le système de M. Miller : je prends Ox, Oy, Ot, normales respectivement à OX, OY, OZ.

Soient (m, n, p) les coordonnées de G, dans le système de M. Miller,
(m', n', p') celles de H,
(m'', n'', p'') celles de I,
(m''', n''', p''') celles de l'extrémité de l'axe ternaire normal au plan.

En joignant ZG, et remarquant que OYZG est un parallélogramme, on trouve facilement

$$m = 0, \quad n = -1, \quad p = 1,$$

et de même

$$m' = 1, \quad n' = 0, \quad p' = -1,$$

$$m'' = -1, \quad n'' = 1, \quad p'' = 0;$$

on a d'ailleurs

$$m''' = 1, \quad n''' = 1, \quad p''' = 1.$$

Donc, d'après les formules générales de transformation, équations (58) de

mon Mémoire sur les Systèmes de points, le nouveau symbole sera

$$(k - h,\ g - k,\ h - g,\ g + h + k),$$

ce que l'on peut indiquer par

$$(16)\qquad (ghk) = (k - h,\ g - k,\ h - g,\ g + h + k).$$

Si l'on eût pris OG', OH', OI' pour axes des coordonnées positives, on aurait eu

$$(17)\qquad (ghk) = (h - k,\ k - g,\ g - h,\ g + h + k).$$

Réciproquement, on trouvera facilement qu'à la notation $(ghik)$, dans le système formé par Ox, Oy, Ot et l'axe ternaire, correspond, dans le système d'axes de M. Miller, le symbole équivalent

$$(18)\qquad \big(k \pm (h - i),\ k \pm (i - g),\ k \pm (g - h)\big) = (ghik),$$

les signes supérieurs se rapportant au cas où les nouveaux axes coordonnés se dirigeraient, en s'élevant au-dessus du plan de la figure, suivant OX, OY, OZ, et les signes inférieurs au cas où les nouveaux axes se dirigeraient suivant OX', OY', OZ'.

Il importe de remarquer que les axes des x et des y ne forment plus ici un système d'axes qui soient conjugués avec l'axe des z; mais on pourra néanmoins les regarder comme tels, si l'on supprime par la pensée tous les Sommets contenus dans les plans réticulaires parallèles au plan des xy, et dont le numéro d'ordre n'est pas un multiple de 3 : j'ai démontré (théorème LXII de mon Mémoire sur les Systèmes de points) que cette suppression ne trouble pas la direction des plans réticulaires de l'Assemblage.

Notation à quatre caractéristiques dans le système binaire. — On continuera à supposer que l'Assemblage est construit d'après le mode hexaédral. L'axe binaire, placé verticalement, sera pris pour axe des z. Dans le plan réticulaire normal à cet axe, on construira un triangle élémentaire OGI' (*fig.* 1), ayant l'un de ses Sommets à l'origine O. L'un des deux côtés qui embrassent

l'angle O, le côté OG par exemple, étant pris pour axe des x, OH parallèle à GI′ sera pris pour axe des y, et OI prolongement de OI′ pour l'axe auxiliaire. Les trois angles GOH, GOI, HOI seront les suppléments de OGI′, GOI′, OI′G ; enfin l'on aura

$$\mathrm{OG} = a, \quad \mathrm{OH} = \mathrm{GI}' = b, \quad \mathrm{OI} = \mathrm{OI}' = c.$$

La notation de la face (ghk) prendra la forme $(ghik)$, à cause de l'axe auxiliaire situé sur le plan des xy.

La forme complète correspondant à cette face sera donnée par les formules

$$(19) \qquad x\{ghik\} = \frac{ghik}{\bar g \bar h \bar i k}, \qquad x\{\bar g \bar h \bar i \bar k\} = \frac{\bar g \bar h \bar i k}{g h i \bar k}.$$

Il sera toujours permis de supposer que OGI′ est le triangle principal du Réseau ; alors les angles GOH, GOI, HOI seront obtus.

De plus, nous admettrons que l'on a

$$(20) \qquad a < b < c,$$

ce qui revient à prendre pour axe des x la Rangée de paramètre minimum du Réseau, et pour axe des y celle dont le paramètre est le plus petit, après la précédente.

Lorsqu'on passe de OG à OH et de OH à OI par une rotation allant de l'est à l'ouest par le sud, je dis que le cristal est *droit*. Lorsque la même rotation s'effectue de l'est à l'ouest par le nord, je dis que le cristal est *renversé :* dans ce cas, il suffira, pour le rendre droit, de le faire tourner de 180 degrés autour d'une droite quelconque située dans le plan des xy.

Ainsi on peut toujours supposer que le cristal est placé dans sa station droite, devant l'observateur qui l'examine : par là, la distinction entre la partie supérieure et la partie inférieure du cristal deviendra facile à établir.

J'admettrai encore que le cristal est ainsi tourné autour de son axe Oz vertical, que la ligne OGx soit dirigée vers l'est, c'est-à-dire de la gauche à la droite du spectateur supposé regardant vers le nord (*) : le plan vertical mené suivant HI′ aura alors pour symbole $(01\bar{1}0)$, et fera face au spectateur ;

(*) C'est la supposition que l'on adopte dans l'orientation des cartes de géographie.

il y aura presque toujours dans le cristal une face bien développée, dirigée parallèlement à ce plan.

L'axe des y positives sera alors renfermé dans le quadrant sud-ouest, et l'axe auxiliaire dans le quadrant nord-ouest.

Ces conventions facilitent l'étude des cristaux du système binaire.

Elles sont pareillement applicables aux cristaux des systèmes sénaire et ternaire, et je supposerai toujours que la face $(01\bar{1}0)$ fait face au spectateur dans les cristaux de ces systèmes : toutes les faces de la forme $(01\bar{1}k)$ regarderont pareillement le spectateur, quoique n'étant pas verticales.

§ VI. — *Des formes restreintes et du nombre de leurs faces.*

Je nommerai *forme parallèle* une réunion de faces de même espèce assujetties à être chacune parallèle, soit à un même axe de symétrie du système, soit à des axes différents, mais de même espèce; il suffit que l'une des faces de la forme soit parallèle à un axe de symétrie pour que la forme soit parallèle. Dans le cas où l'axe auquel la face est parallèle serait d'ordre pair, celle-ci sera en même temps perpendiculaire sur le plan de symétrie qui est normal à cet axe dans l'Assemblage; la forme sera dite alors *forme orthoparallèle*.

Je nommerai *forme normale* une forme dont chaque face est assujettie à être normale à l'un des axes d'une même espèce : une forme normale peut être en même temps parallèle à un axe, soit d'ordre impair, soit d'ordre pair; dans ce dernier cas, elle sera désignée sous le nom de *forme normale orthoparallèle*.

Formes parallèles. — Si l'axe auquel la forme est parallèle est un axe d'ordre impair, la forme conserve toutes ses faces. La forme $\{ghi0\}$ dans le système ternaire, la forme $\{g, h, g \pm h\}$ dans le système terquaternaire, offrent cette circonstance. Si donc on nomme γ le coefficient de réduction du nombre des faces, on a, dans ce cas particulier,

$$(21) \qquad \gamma = 1.$$

Si l'axe auquel la forme est parallèle est un axe d'ordre pair, c'est-à-dire si la forme est orthoparallèle, en faisant tourner (ghk) de 180 degrés autour de cet axe, la face $(g'h'k')$ ainsi obtenue est à la fois directement sem-

blable à (ghk) par rapport à cet axe, et inversement semblable à (ghk), comme lui étant parallèle. Ainsi la demi-forme directe $\varkappa\{ghk\}$ et la demi-forme inverse $\varkappa\{\bar{g}\bar{h}\bar{k}\}$ coïncident, le nombre des faces devient moitié moindre et l'on a, pour les formes orthoparallèles,

$$\gamma = \tfrac{1}{2}. \tag{22}$$

Cela résulte d'ailleurs du théorème LXXXIX de mon Mémoire sur les Systèmes de points.

Voici la liste des formes orthoparallèles dans les différents systèmes cristallins.

Système terquaternaire : deux espèces d'axes d'ordre pair; deux espèces de formes orthoparallèles.

Forme parallèle aux axes quaternaires; son symbole général est $\{gho\}$; tétrakishexaèdre des minéralogistes.

Forme parallèle aux axes binaires; son symbole général est $\{ghh\}$ ou $\{ggk\}$; triakisoctaèdre des minéralogistes, comprenant, comme simple variété, le trapézoèdre.

Ces deux formes sont à vingt-quatre faces.

La forme $\{g, h, g \pm h\}$ est parallèle aux axes ternaires; le polyèdre terminé par toutes les faces de la forme est alors un solide à quarante-huit faces.

Système sénaire : trois espèces d'axes d'ordre pair; trois espèces de formes orthoparallèles.

Forme parallèle à l'axe sénaire; son symbole général est $\{ghio\}$; prisme dodécaèdre indéfini.

Forme parallèle aux axes binaires de première espèce; son symbole est $\{go\overline{gk}\}$; birhomboèdre de première espèce des minéralogistes.

Forme parallèle aux axes binaires de deuxième espèce; son symbole est $\{gg\,\overline{2gk}\}$; birhomboèdre de deuxième espèce des minéralogistes.

Ces trois formes sont à douze faces.

Système quaternaire : comme dans le système précédent.

Forme parallèle à l'axe quaternaire; son symbole général est $\{gho\}$; prisme octaèdre indéfini.

Forme parallèle aux axes binaires de première espèce; son symbole est $\{gok\}$; quadratoctaèdre de première espèce des minéralogistes.

Forme parallèle aux axes binaires de deuxième espèce; son symbole est $\{ggk\}$; quadratoctaèdre de deuxième espèce.

Ces trois formes sont à huit faces.

Système ternaire : une seule espèce d'axe d'ordre pair; une seule espèce de forme orthoparallèle.

Forme parallèle aux axes binaires; son symbole est $\{go\bar{g}k\}$; rhomboèdre des minéralogistes.

Cette forme est à six faces, tandis que la forme générale en a douze.

La forme $\{ghio\}$ est parallèle à l'axe ternaire; elle doit donc avoir douze faces; c'est le prisme dodécaèdre des minéralogistes. Mais le solide résultant se distingue du scalénoèdre, qui est la forme oblique la plus générale, en ce que ses douze faces sont toutes parallèles à l'axe ternaire.

Le scalénoèdre comprend aussi comme cas particulier la forme birhomboédrique $\{gg\overline{2g}k\}$, qui n'est pas une forme parallèle, dans le système ternaire, et qui d'ailleurs embrasse douze faces.

Système terbinaire : trois espèces d'axes d'ordre pair; trois sortes de formes orthoparallèles.

La forme parallèle à l'axe des x a pour symbole $\{ohk\}$; celle parallèle à l'axe des y a pour symbole $\{gok\}$; celle parallèle à l'axe des z a pour symbole $\{gho\}$: prismes rhombes indéfinis.

Système binaire: un seul axe d'ordre pair; une seule forme orthoparallèle.

Forme parallèle, de symbole $\{ghio\}$, consistant en deux faces parallèles entre elles et à l'axe de symétrie du système.

Lorsqu'une face orthoparallèle est en même temps parallèle à un axe d'ordre impair, cette dernière particularité ne modifie pas le nombre des faces de la forme.

Lorsqu'une face orthoparallèle est en même temps parallèle à un autre axe d'ordre pair, alors en vertu du théorème XII de mon Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique (*), la droite normale au plan des deux

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XIV.

axes d'ordre pair sera nécessairement un axe de symétrie de l'Assemblage, et la forme, étant perpendiculaire à cette droite, sera une forme normale.

Formes normales. — Soit L^q l'axe auquel la forme est normale, et soit Q le nombre des axes de son espèce, dans l'Assemblage.

Je supposerai d'abord qu'il ne passe aucun plan de symétrie par cet axe.

Au moment où la face (ghk) devient normale à L^q, ses $q-1$ homologues par rapport à cet axe se confondent avec elle (théorème XC de mon Mémoire sur les Systèmes de points) : d'où l'on voit que le nombre total des faces se réduit de N à $\frac{N}{q}$. On a donc, pour les formes normales,

$$\gamma = \frac{1}{q}. \tag{23}$$

Les demi-formes directe et inverse restent distinctes; le nombre des faces de chacune de ces demi-formes est égal à $\frac{1}{2}\frac{N}{q}$.

Avant de passer outre, remarquons que le nombre des faces de la forme normale peut aussi s'exprimer par $2Q$; car, à chaque axe L^q correspondent une face telle que (ghk) et une autre face qui est son inverse et qui lui est parallèle : d'où l'on déduit l'équation

$$Qq = \frac{N}{2},$$

et, par suite, le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Le numéro d'ordre d'un axe qui n'est contenu dans aucun des plans de symétrie d'un Assemblage donné, étant multiplié par le nombre des axes de son espèce, donne un produit constant égal à la moitié du nombre des faces d'une forme oblique.*

Lorsqu'un plan de symétrie P passe par l'axe L^q, la normale à P est un axe d'ordre pair faisant un angle de 90 degrés avec L^q; donc alors la forme normale à L^q est en même temps parallèle à un axe d'ordre pair, c'est-à-dire orthoparallèle.

Dans ce cas, non-seulement le nombre $\frac{1}{2}$N des faces de chacune des demi-formes directe et inverse devient égal à $\frac{1}{2}\frac{N}{q}$; mais, de plus, ces deux demi-formes viennent se superposer, de sorte que le nombre total des faces est $\frac{1}{2}\frac{N}{q}$.

On a donc, pour les formes normales orthoparallèles,

$$\gamma = \frac{1}{2q}. \tag{24}$$

Comme le nombre des faces de la forme est encore ici égal à 2Q, on en déduit ce nouveau théorème :

THÉORÈME IV. — *Si l'on multiplie le numéro d'ordre d'un axe contenu dans un plan de symétrie de l'Assemblage par le nombre des axes de son espèce, on obtient un produit constant, égal au quart du nombre des faces d'une forme oblique du système.*

Les équations (21), (22), (23) et (24) résolvent complétement le problème de la réduction qu'une forme restreinte peut éprouver dans le nombre de ses faces.

Voici l'énumération des formes normales, dans les différents systèmes cristallins. A l'exception de la forme normale aux axes binaires dans les systèmes ternaire et binaire, elles sont toutes orthoparallèles.

Système terquaternaire : trois espèces d'axes; trois formes normales.

Forme normale aux axes quaternaires, de symbole {100}; cube.

Forme normale aux axes ternaires, de symbole {111}; octaèdre régulier.

Forme normale aux axes binaires, de symbole {110}; dodécaèdre rhomboïdal.

Système sénaire : trois espèces d'axes ; trois formes normales.

Forme normale à l'axe sénaire, de symbole {0001}; deux faces parallèles, ou bases.

Forme normale aux axes binaires de première espèce, de symbole {$11\bar{2}0$}; prisme hexaèdre de deuxième espèce.

Forme normale aux axes binaires de deuxième espèce, de symbole {$10\bar{1}0$}; prisme hexaèdre de première espèce.

Système quaternaire : trois espèces d'axes; trois formes normales.

Forme normale à l'axe quaternaire, de symbole {001}; deux faces parallèles, ou bases.

Forme normale aux axes binaires de première espèce, de symbole {100}; prisme carré de première espèce.

Forme normale aux axes binaires de deuxième espèce, de symbole {110}; prisme carré de deuxième espèce.

Système ternaire : deux espèces d'axes; deux formes normales.

Forme normale à l'axe ternaire, de symbole $\{0001\}$; deux faces parallèles, ou bases.

Forme normale aux axes binaires, de symbole $\{11\bar{2}0\}$; prisme hexaèdre de deuxième espèce.

La forme $\{10\bar{1}0\}$ n'est pas une forme normale, mais simplement un cas particulier de la forme parallèle $\{go\bar{g}k\}$, qui est un rhomboèdre; c'est le prisme hexaèdre de première espèce.

Système terbinaire : trois espèces d'axes; trois formes normales.

Formes normales aux axes de première, de deuxième et de troisième espèces, ayant pour symboles $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$, suivant l'axe auquel elles sont normales; la forme est à deux faces parallèles.

Système binaire : une seule espèce d'axe; une seule forme normale.

Forme normale à l'axe binaire, de symbole $\{0001\}$; elle consiste en deux faces parallèles, bases du cristal.

§ VII. — *Application de la théorie des Assemblages polaires à la méthode des zones.*

Définitions. — Les cristallographes entendent par *zone* un système de faces parallèles à une même droite, que l'on désigne sous le nom d'*axe de zone :* en d'autres termes, une zone est l'ensemble des plans réticulaires passant par une Rangée déterminée de l'Assemblage.

Le plan qui contient les normales abaissées, à partir d'un point pris arbitrairement dans l'intérieur du cristal, sur les faces composantes de la zone, se nomme le *plan du cercle de zone :* il est normal à l'axe de zone. Prolongé jusqu'à la surface de la sphère de projection dont le cristal est censé occuper le centre, ce plan la coupe suivant un grand cercle qui a reçu le nom de *cercle de zone*, et qui contient les pôles des grands cercles de toutes les faces composantes. Chacun de ces pôles est le point d'intersection de la sphère avec la normale abaissée du centre du cristal sur la face, et prolongée indéfiniment : on le nomme le *pôle de la face.*

Nous supposerons que le centre de la sphère de projection est un des Sommets de l'Assemblage. Ce Sommet sera pris pour origine des coordon-

nées ; il sera aussi l'origine des coordonnées de l'Assemblage polaire qui correspond à l'Assemblage donné.

On imaginera construit cet Assemblage polaire dont les propriétés principales ont été exposées dans le § VI de mon Mémoire sur les Systèmes de points. On devra se rappeler que tout plan normal à la Rangée *mnp* a pour symbole [(*mnp*)], et que toute droite normale au plan réticulaire (*ghk*) a pour symbole [*ghk*].

On démontre alors facilement les théorèmes suivants :

Théorème V. — *Tout axe de zone est une Rangée de l'Assemblage qui constitue le cristal.*

C'est une conséquence des corollaires du théorème XXXI de mon Mémoire sur les Systèmes de points. Ordinairement les axes de zone sont en même temps des arêtes du cristal.

Théorème VI. — *Tout cercle de zone est un plan réticulaire de l'Assemblage polaire, et réciproquement.*

Car le cercle de zone est normal à l'axe de zone; donc il appartient à l'Assemblage polaire dont il est l'un des plans réticulaires. (Théorème CVII, Mémoire sur les Systèmes de points.)

Théorème VII. — *Si un axe de zone a pour symbole* ghk, *son cercle de zone aura pour symbole* [(*ghk*)].

C'est encore une conséquence du théorème CVII. On voit que les deux symboles de l'axe de zone et du cercle de zone sont formés des mêmes caractéristiques.

Une zone est déterminée, lorsqu'on connait le symbole de son axe de zone, ou, ce qui revient au même, celui de son cercle de zone.

Problème I. — *Déterminer une zone dont on connaît deux faces* (*ghk*), ($g'h'k'$).

C'est trouver son axe de zone *mnp*, ou son cercle de zone [(*mnp*)].

Puisque le point (m, n, p) doit appartenir aux deux faces (*ghk*), ($g'h'k'$), on a

$$gm + hn + kp = 0,$$
$$g'm + h'n + k'p = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(25)\qquad m = \frac{hk' - kh'}{D}, \qquad n = \frac{kg' - gk'}{D}, \qquad p = \frac{gh' - hg'}{D};$$

D est le plus grand diviseur commun des trois numérateurs. Ainsi le symbole du cercle de zone sera $[(hk'-kh',\ kg'-gk',\ gh'-hg')]$, et l'on se rappellera que l'on doit supprimer les facteurs communs aux trois caractéristiques.

PROBLÈME II. — *Déterminer une face, sachant qu'elle appartient à deux zones dont les axes de zone sont* mnp, m'n'p'.

Soit (ghk) le symbole de la face; on aura, pour la déterminer, les deux équations

$$gm + hn + kp = 0,$$

$$gm' + hn' + kp' = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(26) \qquad g = \frac{np'-pn'}{D}, \qquad h = \frac{pm'-mp'}{D}, \qquad k = \frac{mn'-nm'}{D}:$$

ce sont les équations (35) de mon Mémoire sur les Systèmes de points. Le symbole de la face pourra s'écrire $(np'-pn',\ pm'-mp',\ mn'-nm')$, pourvu qu'on ait le soin de supprimer les facteurs communs aux trois caractéristiques.

PROBLÈME III. — *Une face étant dans la même zone que les faces* (ghk), $(g'h'k')$, *et dans la même zone que les faces* $(g''h''k'')$, $(g'''h'''k''')$, *on demande de déterminer ses caractéristiques.*

L'axe de la première zone aura pour symbole

$$hk'-kh',\ kg'-gk',\ gh'-hg';$$

l'axe de la deuxième zone aura pour symbole

$$h''k'''-k''h''',\ k''g'''-g''k''',\ g''h'''-h''g''',$$

et, en prenant les différences entre les produits croisés, on aura le symbole de la face.

THÉORÈME VIII. — *Le plan réticulaire* (ghk) *qui, passant par l'origine, contient les Rangées* mnp, m'n'p', *contient aussi toutes les Rangées dont le symbole est de la forme* jm + j'm', jn + j'n', jp + j'p', j *et* j' *étant deux nombres entiers quelconques.*

Car, puisque le plan (ghk) contient les Sommets (m, n, p), (m', n', p'),

on a

$$gm + hn + kp = 0,$$
$$gm' + hn' + kp' = 0;$$

donc aussi

$$g(jm + j'm') + h(jn + j'n') + k(jp + j'p') = 0;$$

donc ce plan contient le Sommet dont les coordonnées sont $jm + j'm'$, $jn + j'n'$, $jp + j'p'$.

THÉORÈME IX. — *Réciproquement, le symbole de toute Rangée* MNP *située dans le plan réticulaire qui contient les Rangées* mnp, m′n′p′, *peut être mis sous la forme* $mj + m'j'$, $nj + n'j'$, $pj + p'j'$, j *et* j′ *étant deux nombres entiers convenablement choisis.*

En effet, soit pris arbitrairement une Rangée quelconque $m''n''p''$ extérieure au plan donné, et posons, pour abréger,

$$mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = (mn'p''),$$
$$mn' - nm' = (mn'), \quad (nm'' - mn'') = (nm''), \quad (m'n'' - n'm'') = (m'n''),$$
$$pm' - mp' = (pm'), \quad mp'' - pm'' = (mp''), \quad (p'm'' - m'p'') = (p'm''),$$
$$np' - pn' = (np'), \quad (pn'' - np'') = (pn''), \quad (n'p'' - p'n'') = (n'p'').$$

On a identiquement

$$\begin{aligned} M = {} & \frac{m(n'p'') + m'(pn'') + m''(np')}{(mn'p'')}M \\ & + \frac{m(p'm'') + m'(mp'') + m''(pm')}{(mn'p'')}N \\ & + \frac{m(m'n'') + m'(nm'') + m''(mn')}{(mn'p'')}P. \end{aligned}$$

Développons, par rapport à m, m', m'', en remarquant que l'on a

$$M(np') + N(pm') + P(mn') = 0,$$

attendu que la Rangée MNP est située dans le plan donné, et posons en outre

$$M(n'p'') + N(p'm'') + P(m'n'') = j,$$
$$M(pn'') + N(mp'') + P(nm'') = j';$$

il viendra

$$M = \frac{mj + m'j'}{(mn'p'')}.$$

En opérant de même sur les caractéristiques N et P, on trouvera

$$N = \frac{nj + n'j'}{(mn'p'')},$$
$$P = \frac{pj + p'j'}{(mn'p'')};$$

donc la Rangée qui a pour symbole $mj + m'j'$, $nj + n'j'$, $pj + p'j'$ ne différera pas de la Rangée MNP, et l'on passera de ce dernier symbole au précédent par l'introduction du facteur commun $(mn'p'')$.

Problème IV. — *Trouver toutes les Rangées contenues dans le plan* (ghk).

Soit MNP une telle Rangée ; on aura l'équation de condition

$$gM + hN + kP = 0,$$

qui exprime que le Sommet (M, N, P) appartient au plan.

Si l'on a deux solutions distinctes (m, n, p), (m', n', p') de l'équation ci-dessus, toutes les autres solutions seront, en vertu du théorème précédent, contenues dans les formules

$$(27) \qquad \begin{cases} M = jm + j'm', \\ N = jn + j'n', \\ P = jp + j'p', \end{cases}$$

j et j' étant deux nombres entiers arbitrairement choisis.

Problème V. — *Trouver toutes les faces contenues dans la zone* mnp.

C'est trouver dans l'Assemblage polaire toutes les Rangées contenues dans le cercle de zone $[(mnp)]$.

Soit [GHK] une telle Rangée; on doit avoir la relation

$$Gm + Hn + Kp = 0.$$

Si l'on a deux solutions de l'équation ci-dessus, c'est-à-dire deux faces (ghk), $(g'h'k')$ appartenant à la zone mnp, toutes les autres solutions seront

données par les formules

$$(28)\qquad \begin{cases} G = jg + j'g', \\ H = jh + j'h', \\ K = jk + j'k', \end{cases}$$

j et j' étant deux nombres entiers convenablement choisis.

Théorème X. — *Toute Rangée* MNP *satisfaisant à l'inégalité*

$$M^2 + N^2 + P^2 > 2,$$

peut être considérée comme fournie par l'intersection de deux plans réticulaires distincts, dont l'un contient les Rangées mnp, m′n′p′, *l'autre les Rangées* m″n″p″, m‴n‴p‴, *ces quatre Rangées étant telles que les sommes de carrés,* $m^2 + n^2 + p^2$, $m'^2 + n'^2 + p'^2$, $m''^2 + n''^2 + p''^2$, $m'''^2 + n'''^2 + p'''^2$, *soient toutes les quatre inférieures à la somme* $M^2 + N^2 + P^2$.

Premier cas. — Aucune des caractéristiques n'est égale à zéro.

Alors la Rangée MNP est située dans le plan contenant les Rangées MN o et 001 : car, en faisant $j = 1$, $j' = P$ (solution du problème IV), on trouve le symbole MNP.

De même la Rangée MNP est située dans le plan qui contient M o P, 010, et aussi dans le plan qui contient o NP, 100; ces deux plans, ainsi que le précédent, sont essentiellement distincts. De plus, les sommes des carrés des caractéristiques sont évidemment moindres que $M^2 + N^2 + P^2$.

Deuxième cas. — Une des caractéristiques est égale à zéro; les autres surpassent l'unité en valeur absolue.

Je supposerai que la troisième caractéristique soit nulle, et que le symbole de la Rangée donnée soit MN o. La solution qui convient au cas précédent devient alors illusoire, et l'on devra opérer de la manière suivante :

On prendra pour premier plan réticulaire contenant la Rangée donnée MN o, le plan des xy, lequel contient les Rangées 010 et 100.

On prendra pour second plan réticulaire celui qui contient les Rangées M o 1 et o N $\bar{1}$; en ajoutant deux à deux les caractéristiques, on retombe sur MN o, ce qui suffit à prouver que cette Rangée est contenue dans ce plan (théorème VIII). Les sommes $M^2 + 1$, $N^2 + 1$ sont d'ailleurs inférieures

à $M^2 + N^2$, sauf dans le cas où l'une des caractéristiques serait égale à ± 1, cas que nous allons examiner en dernier lieu.

Troisième cas. — Une des caractéristiques est égale à zéro, une autre à ± 1.

Supposons que l'on ait $N = \pm 1$; on pourra, si M est négatif, changer les signes des trois caractéristiques, ce qui est toujours permis : ainsi, dans $M\overset{\pm}{1}0$, M pourra toujours être réputé positif, sans nuire à la généralité de la démonstration. En outre, on posera $M = 1 + M'$, M' étant un nombre entier positif et nécessairement plus grand que zéro.

On continuera à prendre pour premier plan réticulaire le plan des xy; on prendra ensuite pour deuxième plan réticulaire, distinct du précédent, celui qui passe par $M'\overset{\pm}{1}1$ et par $10\bar{1}$. Ce plan contient la Rangée $M\overset{\pm}{1}0$: on le voit en ajoutant deux à deux les caractéristiques de même rang. Or, puisque $M' + 1 = M$, on a

$$M'^2 + 1 + 1 < M^2 + 1.$$

Donc les quatre sommes des carrés des caractéristiques seront inférieures à $M^2 + 1$.

Enfin, lorsque $M^2 + N^2 + P^2$ est égal à 2, ce qui arrive lorsque l'une des caractéristiques est nulle, et les deux autres de valeur absolue égale à 1, la somme des carrés des caractéristiques n'est plus susceptible d'un abaissement ultérieur.

Corollaire. — De même que l'on peut faire dériver la Rangée MNP de quatre Rangées à caractéristiques plus simples, par les intersections des plans qui contiennent ces dernières Rangées, de même on peut faire dériver ces dernières d'autres plus simples encore, jusqu'à ce qu'on arrive à celles dont la somme des carrés des caractéristiques est égale à 1 ou à 2, c'est-à-dire aux Rangées 100, 010, 001 qui sont les trois arêtes du parallélipipède générateur de l'Assemblage, ou aux Rangées 110, $1\bar{1}0$, 101, $10\bar{1}$, 011, $01\bar{1}$, qui représentent les diagonales de ses faces.

Théorème XI. — *Toute face* (GHK) *satisfaisant à l'inégalité*

$$G^2 + H^2 + K^2 > 2,$$

peut être déterminée par l'intersection de deux zones distinctes, dont l'une contient les faces (ghk), $(g'h'k')$, *l'autre les faces* $(g''h''k'')$, $(g'''h'''k''')$,

telles que les sommes $g^2 + h^2 + k^2$, $g'^2 + h'^2 + k'^2$, $g''^2 + h''^2 + k''^2$, $g'''^2 + h'''^2 + k'''^2$ *soient, toutes les quatre, moindres que* $G^2 + H^2 + K^2$.

C'est une conséquence du théorème X. La normale à la face (GHK) est la Rangée de symbole [GHK] dans l'Assemblage polaire; on peut lui substituer deux plans réticulaires contenant tous les deux [GHK], et, de plus, passant l'un par [ghk], [$g'h'k'$], l'autre par [$g''h''k''$], [$g'''h'''k'''$], les quatre sommes des carrés des caractéristiques de ces Rangées étant moindres que celle relative à la Rangée [GHK]. Ces plans réticulaires représentent les deux cercles de zone qui contiennent, l'un les normales aux faces (GHK), (ghk), ($g'h'k'$), l'autre les normales aux faces (GHK), ($g''h''k''$), ($g'''h'''k'''$) : donc (GHK) appartient à la fois à ces deux zones, et peut être déterminé par leur intersection.

Corollaire. — De même que l'on peut déduire la face (GHK) de quatre autres faces à caractéristiques plus simples, par l'intersection de deux zones, de même on déduira celles-ci d'autres plus simples encore, jusqu'à ce que l'on arrive aux faces (100), (010), (001) qui sont les faces du parallélipipède élémentaire, et aux faces (110), ($1\bar{1}0$), (101), ($10\bar{1}$), (011), ($01\bar{1}$) qui sont parallèles aux six plans diagonaux de ce parallélipipède. La *fig.* 3 représente, en projection sur le plan normal à l'axe des z, les lieux qu'occupent les pôles de ces neuf faces sur la sphère de projection.

THÉORÈME XII (*). — *Le pôle d'une face quelconque* (ghk) *peut être déterminé, sur la sphère de projection, par les intersections successives de cercles de zone obtenus en joignant deux à deux d'autres pôles préalablement connus de position, pourvu que l'on assigne d'avance les lieux des pôles des quatre faces* (100), (010), (001), (111).

D'après le corollaire précédent, on peut toujours déduire la position d'un pôle quelconque de celle des pôles dont les carrés des caractéristiques forment une somme inférieure à 3. Il reste à faire voir comment ces derniers peuvent se déduire des quatre pôles (100), (010), (001), (111).

Le pôle (011) (*fig.* 3) est placé à la rencontre du cercle de zone passant par (001) et (010) avec le cercle de zone passant par (100) et (111).

(*) Ce théorème a déjà été démontré par M. Miller dans son *Traité de Cristallographie.*

De même, le pôle (101) est à la rencontre des deux cercles de zone passant l'un par (001), (100), l'autre par (010) et (111).

Le pôle (110), ainsi que ($\bar{1}\bar{1}0$) sont à la rencontre des cercles de zone passant l'un par (100), (010), l'autre par (001) et (111).

Ces trois pôles étant fixés, on obtiendra:

Le pôle (011), par la rencontre du cercle de zone passant par (001), (010) avec le cercle de zone passant par (101), (110);

Le pôle ($\bar{1}01$), par la rencontre du cercle de zone passant par (001), (100) avec le cercle de zone passant par (011), (110);

Enfin les pôles ($1\bar{1}0$), (110), par la rencontre du cercle de zone passant par (010), (100) avec le cercle de zone passant par (011), (101).

Ces différents modes de dérivation sont indiqués par les lignes de la *fig.* 3.

Il ne faut pas oublier qu'à tout pôle, sur la sphère de projection, en correspond un autre diamétralement opposé, et dont les caractéristiques offrent des signes précisément contraires.

Donc, au moyen des quatre pôles primitivement donnés, on peut, de proche en proche et par des intersections successives, obtenir tous les autres pôles.

Scolie. — Ce théorème a une certaine importance en cristallographie, lorsqu'on emploie la méthode des zones pour la détermination des caractéristiques des faces; il importe en effet de savoir d'avance qu'aucune face du cristal n'échappera à l'emploi de cette méthode.

Problème VI. — *Connaissant les positions relatives des arêtes d'un cristal, trouver son parallélipipède générateur.*

La solution du problème offre un exemple de la réciprocité remarquable qui existe entre un Assemblage et son polaire.

Menez tangentiellement à la sphère de rayon 1 des plans normaux aux arêtes données; vous aurez un polyèdre clos de toutes parts, et qui pourra être considéré comme taillé dans l'Assemblage polaire de l'Assemblage des molécules du cristal. Déterminez son système cristallin et la forme de son parallélipipède générateur, par les procédés ordinaires de la cristallographie, et enfin l'Assemblage polaire correspondant, par les méthodes exposées dans les solutions des problèmes XXXII et suivants de mon Mémoire sur les Systèmes de points.

§ VIII. — *Calcul des angles d'un cristal.*

On peut demander de déterminer soit l'angle que font deux arêtes entre elles, soit l'inclinaison d'une arête sur une face, soit l'angle dièdre de deux faces : la détermination des angles dièdres a beaucoup occupé les cristallographes, à cause de l'intérêt pratique qu'elle présente.

Il ne sera pas sans intérêt de montrer que toutes les formules proposées peuvent se ramener à une formule unique qui, une fois ses constantes déterminées, donne, au moyen de trois logarithmes, la valeur d'un angle dièdre quelconque du cristal.

Nous continuerons à nommer a, b, d, les paramètres des axes des x, des y et des z, α, β, δ les angles plans, μ, ν, ϖ les angles dièdres de ces axes, E l'intervalle moyen des Sommets ou molécules, enfin $[a]$, $[b]$, $[d]$ les paramètres des axes des $[x]$, des $[y]$ et des $[z]$ dans l'Assemblage polaire correspondant. Je rappellerai que l'on a, par le mode même de construction de cet Assemblage,

$$(29) \qquad [a] = \frac{bd\sin\alpha}{E}, \quad [b] = \frac{ad\sin\beta}{E}, \quad [d] = \frac{ab\sin\delta}{E},$$

$$(30) \qquad E^2 = abd\sin\alpha\sin\beta\sin\varpi = abd\sin\alpha\sin\delta\sin\nu = abd\sin\beta\sin\delta\sin\mu.$$

PROBLÈME VII. — *Trouver l'angle de deux Rangées dont les symboles sont* mnp, m′n′p′.

Soient OT, OT′ (*fig.* 4) les deux Rangées données.

L'équation du plan OTT′ est (équation 34, Mémoire sur les Systèmes de points)

$$(np' - pn')\,x + (pm' - mp')\,y + (mn' - nm')\,z = 0.$$

Nommons D le diviseur commun de ces trois binômes, représentons-les par (np'), (pm'), (mn'), et désignons par g, h, k les quotients de ces binômes par D ; nous aurons

$$(np') = g\mathrm{D}, \quad (pm') = h\mathrm{D}, \quad (mn') = k\mathrm{D};$$

(ghk) sera le symbole du plan OTT′ ; S(ghk) sera l'aire du parallélogramme élémentaire du Réseau de ce plan, et, si nous achevons le parallé-

logramme $OTT'T''$, nous aurons, en vertu de l'équation (45) du Mémoire sur les Systèmes de points,

$$\text{aire } OTT'T'' = DS(ghk);$$

mais, d'autre part, en désignant par $(\widehat{P, P'})$ l'angle TOT', et par $Pmnp$, $Pm'n'p'$ les paramètres OT, OT', on a

$$\text{aire } OTT'T'' = Pmnp \;\; Pm'n'p' \;\; \sin(\widehat{P, P'});$$

d'où l'on déduit la valeur suivante de $\sin(\widehat{P, P'})$,

$$(31) \qquad \sin(\widehat{P, P'}) = \frac{DS(ghk)}{Pmnp \;\; Pm'n'p'}.$$

On pourrait conclure de cette formule l'angle $(\widehat{P, P'})$; mais elle offre l'inconvénient de fournir deux valeurs supplémentaires.

On lèvera cette difficulté, en remarquant que les triangles OTT'', OTT' donnent

$$OT''^2 = OT^2 + OT'^2 + 2OT \,.\, OT' \,.\, \cos(\widehat{P, P'}),$$

$$TT'^2 = OT^2 + OT'^2 - 2OT \,.\, OT' \,.\, \cos(\widehat{P, P'});$$

d'où

$$\cos(\widehat{P, P'}) = \frac{\frac{1}{4}(OT''^2 - TT'^2)}{OT \,.\, OT'},$$

et, comme l'on a d'ailleurs,

$$OT'' = Pm + m', n + n', p + p',$$

$$TT' = Pm - m', n - n', p - p',$$

il vient enfin

$$(32) \quad \cos(\widehat{P, P'}) = \frac{\frac{1}{4}(P^2 m + m', n + n', p + p' - P^2 m - m', n - n', p - p')}{Pmnp \;\; Pm'n'p'},$$

et, en divisant (31) par (32),

$$(33) \quad \text{tang}(\widehat{P, P'}) = \frac{DS(ghk)}{\frac{1}{4}(P^2 m + m', n + n', p + p' - P^2 m - m', n - n', p - p')},$$

valeurs qui ne sont sujettes à aucune ambiguité.

La formule (33) est la plus convenable dans la pratique, parce qu'elle n'exige que trois logarithmes au lieu de quatre, et parce que le facteur $S(ghk)$ est constant pour toutes les arêtes appartenant à la même face.

Si maintenant l'on met l'équation (73) de mon Mémoire sur les Systèmes de points, sous la forme

$$(34)\quad S^2(ghk) = E^2\left[g^2[a]^2 + h^2[b]^2 + k^2[d]^2 - 2gh[a][b]\cos\varpi - 2gk[a][d]\cos\nu - 2hk[b][d]\cos\mu\right],$$

et, si l'on se rappelle que l'on a

$$(35)\quad P^2 mnp = m^2a^2 + n^2b^2 + p^2d^2 + 2mnab\cos\delta + 2mpab\cos\delta + 2np\,bd\cos\alpha,$$

on aura, en développant le dénominateur de (33), et remplaçant au numérateur Dg, Dh, Dk par (np'), (pm'), (mn'),

$$(36)\quad \operatorname{tang}(\widehat{P,P'}) = \frac{E\sqrt{(np')^2[a]^2 + (pm')^2[b]^2 + (mn')^2[d]^2 - 2(np')(pm')[a][b]\cos\varpi - 2(np')(mn')[a][d]\cos\nu - 2(pm')(mn')[b][d]\cos\mu}}{mm'a^2 + nn'b^2 + pp'd^2 + (mn' + nm')ab\cos\delta + (mp' + pm')ad\cos\beta + (np' + pn')bd\cos\alpha}.$$

Lorsque les douze coefficients

$$E^2[a]^2,\ E^2[b]^2,\ E^2[d]^2,\ 2E^2[a][b]\cos\varpi,\ 2E^2[a][d]\cos\nu,\ 2E^2[b][d]\cos\mu,$$
$$a^2,\ b^2,\ d^2,\ ab\cos\delta,\ ad\cos\beta,\ bd\cos\alpha,$$

auront été calculés une fois pour toutes, en les multipliant par des nombres entiers toujours assez simples, on aura l'angle $(\widehat{P,P'})$ au moyen de trois logarithmes.

Problème VIII. — *Trouver l'angle des deux faces (ghk), $(g'h'k')$.*

Cet angle est le supplément de l'angle des deux normales aux faces : or ces normales ont pour symboles $[ghk]$, $[g'h'k']$ dans l'Assemblage polaire. On pourra donc se servir de la formule (36), en y remplaçant

$$\begin{aligned}
&m, n, p, m', n', p', \text{ par } g, h, k, g', h', k',\\
&a, b, d, [a], [b], [d], \text{ par } [a], [b], [d], a, b, d,\\
&\alpha, \beta, \delta, \text{ par } 180^\circ - \mu,\ 180^\circ - \nu,\ 180^\circ - \varpi,\\
&\mu, \nu, \varpi, \text{ par } 180^\circ - \alpha,\ 180^\circ - \beta,\ 180^\circ - \gamma,\\
&(\widehat{P,P'}) \text{ par } 180^\circ - (\widehat{F,F'});
\end{aligned}$$

on aura alors

$$(37)\quad \operatorname{tang}(\widehat{F,F'}) = \frac{-E\sqrt{(hk')^2a^2 + (kg')^2b^2 + (gh')^2d^2 + 2(hk')(kg')ab\cos\delta + 2(hk')(gh')ad\cos\beta + 2(kg')(gh')bd\cos\alpha}}{gg'[a]^2 + hh'[b]^2 + kk'[d]^2 - (gh' + hg')[a][b]\cos\varpi - (gk' + kg')[a][d]\cos\nu - (hk' + kh')[b][d]\cos\mu}.$$

La quantité sous le radical divisée par le carré du commun diviseur des binômes (gh'), (hk'), (kg'), représente le carré du paramètre de l'axe de la zone qui contient les faces (ghk), $(g'h'k')$; ce quotient reste donc constant dans toute l'étendue de la zone.

Lorsque les douze coefficients

$$E^2a^2,\ E^2b^2,\ E^2d^2,\ 2E^2ab\cos\delta,\ 2E^2ad\cos\beta,\ 2E^2bd\cos\alpha,$$

$$[a]^2,\ [b]^2,\ [d]^2,\ [a][b]\cos\varpi,\ [a][d]\cos\nu,\ [b][d]\cos\mu,$$

auront été calculés une fois pour toutes, on aura facilement l'angle dièdre $(\widehat{F, F'})$ au moyen de trois logarithmes.

Il est utile de remarquer que l'équation (37) peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-EP(hk'), (kg'), (gh')}{gg'[a]^2 + hh'[b]^2 + kk'[d]^2 - (gh' + hg')[a][b]\cos\varpi - (gk' + kg')[a][d]\cos\nu - (hk' + kh')[b][d]\cos\mu},$$

où le terme $P(hk'), (kg'), (gh')$ est le paramètre de l'axe de la zone qui contient les faces F et F', ou l'un des multiples de ce paramètre.

Nous allons maintenant chercher ce que devient la formule (37), dans le système binaire, lorsque la notation des faces comprend quatre caractéristiques.

Problème IX. — *Trouver l'angle des deux faces* $(ghik)$, $(g'h'i'k')$, *dans le système binaire.*

Si l'on se borne à considérer les trois axes des x, des y et des z, dont le dernier est normal au plan des deux autres, les caractéristiques i et i' disparaissent, et, en faisant

$$\alpha = \beta = 90°,$$

$$\mu = \nu = 90°,$$

$$\varpi = \delta,$$

on trouve

$$(38)\quad \operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-E\sqrt{(gh')^2d^2 + (hk')^2a^2 + (kg')^2b^2 + 2(hk')(kg')ab\cos\delta}}{kk'[d]^2 + gg'[a]^2 + hh'[b]^2 - (gh' + hg')[a][b]\cos\delta}.$$

Soit mnp l'axe de la zone des faces F et F', de sorte que l'on ait

$$m = \frac{(hk')}{D} = \frac{-(kh')}{D},\quad n = \frac{(kg')}{D},\quad p = \frac{(gh')}{D};$$

la quantité sous le signe $\sqrt{\ }$ aura pour valeur D^2P^2mnp.

Or, si l'on projette le Sommet (m, n, p) sur le plan des xy en (m, n, o), on aura évidemment

$$(39) \qquad P^2 mnp = p^2 d^2 + P^2 mno.$$

Rétablissons maintenant l'axe auxiliaire de paramètre c, satisfaisant aux conditions de position énoncées à la page 123, et faisons reparaître les caractéristiques i et i'.

La Rangée mno peut être considérée comme appartenant au Réseau du plan des xy, envisagé indépendamment de l'Assemblage : elle est susceptible, les axes des x et des y restant les mêmes, de recevoir un symbole de la forme (gh) (Mémoire sur les Systèmes de points, page 11), et en ne tenant pas compte du facteur commun qui peut exister entre m et n, ce symbole sera $(-n, m)$, puisque la Rangée va de l'origine au point (m, n) ; l'on peut aussi lui assigner un symbole de la forme (ghi) (même Mémoire, page 18), et alors le nouveau symbole sera $(-n, m, -m+n)$, puisque la somme des trois caractéristiques doit être égale à zéro. Alors, en vertu de la formule (22) du Mémoire cité, on aura

$$P^2 mno = -m(-m+n)a^2 + n(-m+n)b^2 + mnc^2.$$

Or, on a d'autre part

$$-m+n = \frac{(kh')+(kg')}{D} = \frac{-(ki')}{D},$$

en tenant compte de ce que les sommes $g+h+i$, $g'+h'+i'$ sont égales à zéro.

Si l'on substitue cette valeur et celles de m et n dans $P^2 mno$, il vient

$$P^2 mno = \frac{-(kh')(ki')a^2 - (kg')(ki')b^2 - (kg')(kh')c^2}{D^2}.$$

Substituant de nouveau dans l'équation (39), multipliant par D^2, et remarquant que Dp est égal à (gh'), on trouve

$$(40) \quad D^2 P^2 mnp = (gh')^2 d^2 - (kh')(ki')a^2 - (kg')(ki')b^2 - (kg')(kh')c^2;$$

telle est la valeur de la quantité contenue sous le radical de l'expression de

tang $(\widehat{\mathrm{F}, \mathrm{F}'})$: on peut y remplacer $(gh')^2$ par les quantités équivalentes $(gi')^2$, ou $(hi')^2$.

On peut effectuer sur le dénominateur une transformation analogue. En effet, d'après les formules de la page 121 de mon Mémoire sur les Systèmes de points, on a

$$[a] = \frac{db}{\mathrm{E}}, \qquad [b] = \frac{da}{\mathrm{E}};$$

or le triangle GOI' de la *fig.* 1, dans lequel on a

$$\mathrm{OG} = a, \quad \mathrm{GI}' = b, \quad \mathrm{OI}' = c, \quad \mathrm{OGI}' = 180^\circ - \delta,$$

fournit la relation

$$2ab\cos\delta = c^2 - a^2 - b^2;$$

donc

$$[a]\,[b]\cos\delta = \frac{d^2}{2\,\mathrm{E}^2}(c^2 - a^2 - b^2).$$

Si l'on substitue dans le dénominateur de tang $(\widehat{\mathrm{F}, \mathrm{F}'})$ ces valeurs de $[a]$, $[b]$, $[a][b]\cos\delta$, il prend la forme

$$kk'[d]^2 + \frac{d^2}{2\mathrm{E}^2}\left[2gg'b^2 + 2hh'a^2 - (gh' + hg')(c^2 - a^2 - b^2)\right];$$

développant, et remplaçant $g + h$ par $-i$, $g' + h'$ par $-i'$, il devient

$$kk'[d]^2 + \frac{d^2}{2\mathrm{E}^2}\left[-(hi' + ih')a^2 - (gi' + ig')b^2 - (gh' + hg')c^2\right].$$

D'où l'on voit que la formule (38), après avoir multiplié haut et bas par E^2, se change en

(41) $$\operatorname{tang}(\widehat{\mathrm{F}, \mathrm{F}'}) = \frac{-\mathrm{E}^2\sqrt{(gh')^2 d^2 - (kh')(ki')a^2 - (kg')(ki')b^2 - (kg')(kh')c^2}}{kk'[d]^2\mathrm{E}^2 - \left(\frac{hi' + ih'}{2}\right)a^2 d^2 - \left(\frac{gi' + ig'}{2}\right)b^2 d^2 - \left(\frac{gh' + hg'}{2}\right)c^2 d^2}.$$

On peut substituer maintenant aux paramètres a, b, c, d des lignes trigonométriques dépendant d'angles immédiatement observables sur le cristal.

Divisons haut et bas par $[d]^2 E^2$, et posons

$$\frac{d}{[d]E} = \Phi;$$

puis, à cause de $[d] = \frac{E^2}{d}$ (Mémoire sur les Systèmes de points, page 121), posons encore

$$(42) \qquad \Phi = \frac{d^2}{E^3} = \frac{E}{[d]^3};$$

nous changerons (41) en

$$(43) \quad \operatorname{tang}(\widehat{F,F'}) = \frac{-\sqrt{(gh')^2\Phi^2 d^2 - (kh')(ki')\Phi^2 a^2 - (kg')(ki')\Phi^2 b^2 - (kg')(kh')\Phi^2 c^2}}{kk' - \left(\frac{hi'+ih'}{2}\right)\Phi^2 a^2 - \left(\frac{gi'+ig'}{2}\right)\Phi^2 b^2 - \left(\frac{gh'+hg'}{2}\right)\Phi^2 c^2},$$

formule qui n'exige que le calcul préliminaire de quatre coefficients, $\Phi^2 a^2$, $\Phi^2 b^2$, $\Phi^2 c^2$ et $\Phi^2 d^2$.

Représentons maintenant l'angle GOH (*fig.* 1) par $(\widehat{x,y})$, l'angle GOI par $(\widehat{x,t})$, l'angle HOI par $(\widehat{y,t})$, et prenons pour unité de longueur le diamètre du cercle circonscrit au triangle GOI'; OG, GI' = OH, OI' = OI étant les trois paramètres a, b, c, nous aurons

$$(44) \qquad \begin{cases} a = \sin(\widehat{y,t}), \quad b = \sin(\widehat{x,t}), \quad c = \sin(\widehat{x,y}); \\ E^2 = ab\sin(\widehat{x,y})\,d = abcd. \end{cases}$$

Soit U l'angle dièdre compris entre la face $(01\bar{1}1)$ parallèle à l'axe des x, et le plan des xy ou (0001); soit V l'angle dièdre compris de même entre $(10\bar{1}1)$ parallèle à l'axe des y et (0001); soit enfin W l'angle dièdre compris entre $(1\bar{1}01)$ parallèle à l'axe auxiliaire et (0001); on trouvera facilement

$$(45) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} U = -\Phi a, \\ \operatorname{tang} V = -\Phi b, \\ \operatorname{tang} W = -\Phi c. \end{cases}$$

On en déduira la valeur de l'auxiliaire Φ par l'une des trois équations

$$(46) \qquad \Phi = -\frac{\operatorname{tang} U}{\sin(\widehat{y,t})} = -\frac{\operatorname{tang} V}{\sin(\widehat{x,t})} = -\frac{\operatorname{tang} W}{\sin(\widehat{x,y})}.$$

Les angles $(\widehat{y,t})$, $(\widehat{x,t})$, $(\widehat{x,y})$ doivent avoir été mesurés au goniomètre, ainsi que l'un au moins des trois angles U, V, W. On connaîtra donc Φ, et par suite

$$(47)\qquad \Phi^2 d^2 = \frac{\operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V \operatorname{tang}^2 W}{\Phi^2} = \operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V \sin^2(\widehat{x,y});$$

donc enfin

$$(48)\qquad \operatorname{tang}(\widehat{F,F'}) = \frac{-\sqrt{(gh')^2 \operatorname{tg}^2 U \operatorname{tg}^2 V \sin^2(\widehat{x,y}) - (kh')(ki')\operatorname{tg}^2 U - (kg')(ki')\operatorname{tg}^2 V - (kg')(kh')\operatorname{tg}^2 W}}{kk' - \frac{hi' + ih'}{2}\operatorname{tg}^2 U - \frac{gi' + ig'}{2}\operatorname{tg}^2 V - \frac{gh' + hg'}{2}\operatorname{tg}^2 W},$$

formule qui donne l'angle des faces en fonction des angles immédiatement observés : c'est celle qui me paraît la plus commode dans la pratique. On peut y remplacer $\operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V \sin^2(\widehat{x,y})$ par $\operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 W \sin^2(\widehat{x,t})$ ou par $\operatorname{tang}^2 V \operatorname{tang}^2 W \sin^2(\widehat{y,t})$.

Les paramètres linéaires a, b, c sont donnés par les formules (44), et d par l'équation suivante :

$$(49)\qquad d = \operatorname{tg} U \sin(\widehat{x,t}) \sin(\widehat{x,y}) = \operatorname{tg} V \sin(\widehat{y,t}) \sin(\widehat{x,y}) = \operatorname{tg} W \sin(\widehat{y,t}) \sin(\widehat{x,t}) = \Phi abc.$$

Je prendrai comme exemple le nitrate neutre de mercure dont les angles ont été mesurés par M. Marignac, et que je reproduis ici, *fig.* 5. Les six faces désignées par les lettres τ, t, T, L, M, l dans le Mémoire de M. Marignac (*) peuvent être représentées par les symboles suivants à quatre caractéristiques :

$\tau = (01\bar{1}0)$, face parallèle à l'axe des x et à l'axe des z;

$t = (10\bar{1}0)$, face parallèle à l'axe des y et à l'axe des z;

$T = (1\bar{1}00)$, face parallèle à l'axe des t et à l'axe des z;

$L = (0001)$, face normale à l'axe des z;

$M = (1\bar{1}01)$;

$l = (11\bar{2}1)$.

(*) *Annales de Chimie et Physique*, 3e serie, tome XXVII, page 323. On a retourné le cristal de la *fig.* 3 du Memoire de M Marignac, afin de rendre son axe de symetrie vertical.

L'observation goniométrique a donné

$$\widehat{(x,y)} = [\widehat{(01\bar{1}0),(\bar{1}010)}] = \tau \text{ sur } t = 108^\circ 40',$$

$$\widehat{(x,t)} = [\widehat{(01\bar{1}0),(1\bar{1}00)}] = \tau \text{ sur T} = 116^\circ 35',$$

$$\widehat{(y,t)} = [\widehat{(10\bar{1}0),(1\bar{1}00)}] = t \text{ sur T} = 134^\circ 45',$$

$$W = [\widehat{(1\bar{1}01),(0001)}] = \text{M sur L} = 138^\circ 10'.$$

Des formules (44) et (49) on déduit, pour les principaux éléments du prisme élémentaire de l'Assemblage, les valeurs suivantes :

$$a = 0{,}7102, \qquad d = 0{,}5685,$$
$$b = 0{,}8943, \qquad \text{E} = 0{,}6994;$$
$$c = 0{,}9474,$$

on a ensuite, pour les constantes de l'équation (48),

$$\text{tang}^2\,\text{U} = 0{,}4503, \quad \text{U (calculé)} = 146^\circ 8',$$
$$\text{tang}^2\,\text{V} = 0{,}7140, \quad \text{V (calculé)} = 139^\circ 48',$$
$$\text{tang}^2\,\text{W} = 0{,}8010,$$
$$\text{tang}^2\,\text{U}\,\text{tang}^2\,\text{V}\,\sin^2\widehat{(x,y)} = 0{,}2886.$$

Avec ces éléments, on demande l'inclinaison de L sur l.

La formule générale devient, puisque $(g'h'i'k') = (0001)$,

$$\text{tang}\,\widehat{(\text{L},l)} = \frac{-\sqrt{-hi\,\text{tang}^2\,\text{U} - gi\,\text{tang}^2\,\text{V} - gh\,\text{tang}^2\,\text{W}}}{k} = -\sqrt{2\,\text{tang}^2\,\text{U} + 2\,\text{tang}^2\,\text{V} - \text{tang}^2\,\text{W}},$$

$$\widehat{(\text{L},l)} = 128^\circ 59',6.$$

On trouverait de même

$$\widehat{(\text{L},\mu)} = 126^\circ 31',4,$$

μ étant la face de symbole $(02\bar{2}1)$, laquelle se développe quelquefois sur l'arête qui sépare L de τ.

L'une quelconque des formules (41), (43) ou (48) résout complétement le problème IX; si l'on emploie la formule (43), on devra se rappeler que l'on a

$$\Phi = \frac{d^2}{\text{E}^2}.$$

La formule générale (37) se simplifie beaucoup, lorsque les axes sont rectangulaires, ce qui a lieu dans le système terbinaire; il en est de même de la formule (41), lorsque les angles que forment les trois demi-axes positifs des x, des y et des t deviennent égaux à 120 degrés, ce qui arrive dans le cas du système sénaire. Nous allons successivement examiner ces deux cas.

Problème X. — *Trouver l'angle de deux faces* (ghk), $(g'h'k')$, *dans le système terbinaire et dans le système quaternaire.*

On a alors

$$\alpha = \beta = \delta = 90^\circ, \quad \mu = \nu = \varpi = 90^\circ,$$

$$(50) \quad \operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-E\sqrt{(hk')^2a^2 + (kg')^2b^2 + (gh')^2d^2}}{gg'[a]^2 + hh'[b]^2 + kk'[d]^2} = \frac{-E^2\sqrt{(hk')^2a^2 + (kg')^2b^2 + (gh')^2d^2}}{gg'b^2d^2 + hh'a^2d^2 + kk'a^2b^2}.$$

Si l'on divise haut et bas par $a^2\,b^2\,d^2$, cette équation devient

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = -\sqrt{\frac{(gh')^2}{a^2b^2} + \frac{(kg')^2}{a^2d^2} + \frac{(hk')^2}{b^2d^2}} : \frac{gg'}{a^2} + \frac{hh'}{b^2} + \frac{kk'}{d^2},$$

forme sous laquelle elle a déjà été donnée par M. Neumann (*).

On peut la simplifier en posant, comme dans le problème précédent,

$$(51) \quad \begin{cases} U = [(011), \widehat{\ } (001)], \\ V = [(101), \widehat{\ } (001)]; \end{cases}$$

on trouve alors facilement

$$(52) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} U = -\dfrac{d}{b} = -\dfrac{d^2}{E^2}a, \\ \operatorname{tang} V = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{d^2}{E^2}b. \end{cases}$$

Si l'on divise, haut et bas, le troisième membre de la formule (50) par $a^2\,b^2$, en tenant compte des équations (52), on aura

$$(53) \quad \operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{(hk')^2 \operatorname{tang}^2 U + (kg')^2 \operatorname{tang}^2 V + (gh')^2 \operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V}}{gg' \operatorname{tang}^2 U + hh' \operatorname{tang}^2 V + kk'},$$

formule qui n'exige que le calcul de trois coefficients, au lieu de six.

(*) *Beitræge zur Krystallonomie*, Berlin, 1823.

Dans le système quaternaire, on a $U = V$, et si l'on divise haut et bas par $\tang^2 U$, la formule précédente devient

$$(54) \qquad \tang(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{(gh')^2 + \{(hk')^2 + (kg')^2\}\cot^2 U}}{gg' + hh' + kk' \cot^2 U}.$$

Problème XI. — *Trouver l'angle de deux faces* $(ghik)$, $(g'h'i'k')$, *dans les systèmes sénaire et ternaire.*

On a, dans ce cas,

$$(\widehat{x, y}) = (\widehat{x, t}) = (\widehat{y, t}) = 120°,$$
$$a = b = c.$$

Si l'on élève au carré la formule

$$(kg') + (kh') + (ki') = 0,$$

on trouve

$$-(kh')(ki') - (kg')(ki') - (kg)(kh') = \tfrac{1}{2}\{(kg')^2 + (kh')^2 + (ki')^2\};$$

d'autre part on a

$$-(hi' + ih') - (gi' + ig') - (gh' + hg') = gg' + hh' + ii';$$

si l'on substitue ces valeurs dans la formule (43), elle devient

$$(55) \quad \tang(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{(gh')^2\Phi^2 d^2 + \frac{1}{2}\{(kg')^2 + (kh')^2 + (ki')^2\}\Phi^2 a^2}}{kk' + \frac{1}{2}(gg' + hh' + ii')\Phi^2 a^2};$$

mais l'on a d'ailleurs

$$\Phi^2 a^2 = \tang^2 U,$$
$$\Phi^2 d^2 = \tang^4 U \sin^2(\widehat{x, y}) = \tfrac{3}{4}\tang^4 U;$$

et, si l'on multiplie haut et bas, dans (55), par $2\cot^2 U$, il viendra

$$(56) \qquad \tang(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{3(gh')^2 + \{(kg')^2 + (kh')^2 + (ki')^2\}\, 2\cot^2 U}}{gg' + hh' + ii' + kk' . 2\cot^2 U},$$

formule dans laquelle on peut remplacer $2\cot^2 U$ par $\frac{3a^2}{2d^2}$.

Cette équation donnera, au moyen de la constante unique $2\cot^2 U$, cal-

culée une fois pour toutes, les valeurs des angles dièdres des faces, dans les Assemblages sénaire et ternaire.

J'ai traité avec détail la question de l'angle des faces dans les différents systèmes cristallins, à cause de son importance pratique. On peut traiter de même celle de l'angle que forment entre elles les arêtes ; c'est le but des problèmes suivants.

PROBLÈME XII. — *Trouver l'angle de deux Rangées* mnp, m'n'p', *dans le système binaire.*

Soient toujours a, b, d les paramètres et δ l'angle compris entre a et b. On aura à considérer, dans le polaire, les paramètres $[a]$, $[b]$, $[d]$ et l'angle $[\delta] = 180^\circ - \delta$ qui est compris entre $[a]$ et $[b]$.

Dans cet Assemblage, les plans normaux à mnp, $m'n'p'$ ont pour symboles $[(mnp)]$, $[(m'n'p')]$, et, si l'on ajoute les caractéristiques auxiliaires o, o', telles que l'on ait

$$m + n + o = 0,$$
$$m' + n' + o' = 0,$$

on aura à déterminer l'angle des faces $[(mnop)]$, $[(m'n'o'p')]$ et à en prendre le supplément.

On remplacera donc, dans la formule (41), les lettres g, h, i, k par m, n, o, p ; $a, b, c, d, [d]$, par $[a]$, $[b]$, $[c]$, $[d]$, d ; $(\widehat{\mathrm{F}, \mathrm{F}'})$ par $180^\circ - (\widehat{\mathrm{P}, \mathrm{P}'})$: le paramètre auxiliaire $[c]$ sera donné par la formule

$$(57) \qquad 2\,[a]\,[b] \cos(180^\circ - \delta) = [c]^2 - [a]^2 - [b]^2.$$

Il vient alors

$$(58) \quad \operatorname{tang}(\widehat{\mathrm{P}, \mathrm{P}'}) = \frac{\mathrm{E}^2 \sqrt{(mn')^2[d]^2 - (pn')(po')[a]^2 - (pm')(po')[b]^2 - (pm')(pn')[c]^2}}{pp'd^2\mathrm{E}^2 - \left(\frac{no' + on'}{2}\right)[a]^2[d]^2 - \left(\frac{mo' + om'}{2}\right)[b]^2[d]^2 - \left(\frac{mn' + nm'}{2}\right)[c]^2[d]^2},$$

formule que l'on pourrait facilement modifier de manière à lui donner la forme des équations (43) ou (48). Les valeurs de $[a]$, $[b]$, $[d]$ sont données par les équations

$$[a] = \frac{bd}{\mathrm{E}}, \quad [b] = \frac{ad}{\mathrm{E}}, \quad [d] = \frac{\mathrm{E}^2}{d},$$

et $[c]$ par l'équation (57).

Problème XIII. — *Trouver l'angle de deux Rangées* mnp, m'n'p', *dans le système terbinaire.*

Soit $(\widehat{P, P'})$ l'angle des deux Rangées; cet angle sera le supplément de l'angle que forment entre eux les plans $[(mnp)]$, $[(m'n'p')]$ du polaire. Si donc on remplace dans la formule (50) les lettres g, h, k par m, n, p, et si l'on échange a et $[a]$, b et $[b]$, d et $[d]$, on aura

$$(59)\quad \operatorname{tang}(\widehat{P, P'}) = \frac{E\sqrt{(np')^2[a]^2+(pm')^2[b]^2+(mn')^2[d]^2}}{mm'a^2+nn'b^2+pp'd^2} = \frac{\sqrt{(np')^2 b^2 d^2+(pm')^2 a^2 d^2+(mn')^2 a^2 b^2}}{mm'a^2+nn'b^2+pp'd^2},$$

formule dont les constantes se réduisent à trois, si l'on divise haut et bas par d^2.

Problème XIV. — *Trouver l'angle de deux Rangées* mnp, m'n'p', *dans le système sénaire.*

Pour pouvoir adapter les formules (55) et (56) à la solution de ce problème, il convient de supposer que les demi-axes des x et des y positifs font entre eux un angle de 60 degrés et non de 120 degrés. Si l'on avait dénoté les Rangées dans le système d'axes correspondant à l'angle de 120 degrés, il suffirait, pour revenir au système des axes se coupant sous l'angle de 60 degrés, de remplacer mnp par $m-n$, n, p, ou par m, $n-m$, p.

Ce remplacement ayant été fait, il est clair que $[mnp]$, $[m'n'p']$ seront des plans réticulaires de l'Assemblage polaire, et que ce dernier aura quatre axes, dont les trois inférieurs, horizontaux, se sépareront les uns des autres sous des inclinaisons de 120 degrés.

Ainsi, en introduisant les auxiliaires o, o' telles que l'on ait

$$(60)\quad \begin{cases} m+n+o=0, \\ m'+n'+o'=0, \end{cases}$$

et remplaçant $2\cot^2 U$ par $2\cot^2[U]$, g, h, i, k par m, n, o, p, on aura

$$(61)\quad \operatorname{tang}(\widehat{P, P'}) = \frac{\sqrt{3(mn')^2+\{(pm')^2+(pn')^2+(po')^2\}\, 2\cot^2[U]}}{mm'+nn'+oo'+pp'.\, 2\cot^2[U]}:$$

$[U]$ représente la valeur de l'angle auxiliaire U dans l'Assemblage polaire; on aura, pour le déterminer, la relation

$$2\cot^2[U] = \frac{3[a]^2}{2[d]^2},$$

et, en vertu de l'équation (94) de mon Mémoire sur les Systèmes de points,

$$2\cot^2[\mathrm{U}] = 2\frac{d^2}{a^2}. \tag{62}$$

Comme exemple, proposons-nous de déterminer l'angle de *mnp* avec 001, c'est-à-dire avec l'axe des z. On a alors $m' = n' = o' = 0$, $p' = 1$; d'où

$$\operatorname{tang}(\widehat{\mathrm{P}, \text{axe des } z}) = \frac{\sqrt{(m^2+n^2+o^2)\,2\,\frac{d^2}{a^2}}}{p.2\,\frac{d^2}{a^2}} = \frac{a\sqrt{\frac{m^2+n^2+o^2}{2}}}{pd} = \frac{a\sqrt{m^2+n^2+mn}}{pd},$$

formule facile à vérifier directement.

Les formules (60), (61) et (62) donnent la solution complète de la question.

PROBLÈME XV. — *Trouver le plan réticulaire normal à la Rangée* mnp.

Soit $m'n'p'$ une Rangée quelconque normale à la Rangée *mnp*; la formule (36) montre que les caractéristiques m', n', p' devront satisfaire à l'équation de condition

$$mm'a^2 + nn'b^2 + pp'd^2 + (mn'+nm')\,ab\cos\delta + (mp'+pm')\,ad\cos\beta + (np'+pn')\,bd\cos\alpha = 0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} & ma^2 + nab\cos\delta + pad\cos\beta = g, \\ & mab\cos\delta + nb^2 + pbd\cos\alpha = h, \\ & mad\cos\beta + nbd\cos\alpha + pd^2 = k, \end{aligned}\right. \tag{63}$$

cette équation devient

$$gm' + hn' + kp' = 0;$$

ainsi la Rangée $m'n'p'$ est contenue dans le plan (ghk); on peut donc considérer g, h, k comme étant les caractéristiques du plan normal, pourvu que l'on choisisse une unité de longueur qui rende numériques a, b et d; car il faut que g, h, k puissent être considérés comme des nombres.

Les quantités g, h, k ne seront pas en général des nombres simples; mais on peut néanmoins les considérer comme étant entiers, parce qu'il est toujours permis de multiplier g, h, k par un même facteur égal à l'unité suivie

d'un nombre assez grand de zéros pour pouvoir négliger la partie décimale de leur développement.

PROBLÈME XVI. — *Trouver la Rangée normale au plan* (ghk).

En égalant à zéro le dénominateur du second membre de l'équation (37), on aura la condition pour qu'un plan tel que $(g'h'k')$ soit normal au plan donné; puis posant

$$(64)\quad \begin{cases} g[a]^2 - h[a][b]\cos\varpi - k[a][d]\cos\nu = m, \\ -g[a][b]\cos\varpi + h[b]^2 - k[b][d]\cos\mu = n, \\ -g[a][d]\cos\nu - h[b][d]\cos\mu + k[d]^2 = p, \end{cases}$$

on verra facilement que la Rangée normale cherchée a pour symbole mnp; on remarquera en outre que $[a]$, $[b]$, $[d]$ doivent être considérés comme étant des quantités numériques.

Les nombres m, n, p peuvent être fractionnaires, ou même incommensurables; mais il ne saurait y avoir aucun inconvénient à leur conserver la valeur que leur assignent les formules (64).

PROBLÈME XVII. — *Trouver l'angle que fait la Rangée* mnp *avec le plan réticulaire* (ghk).

Imaginons que, sur le parallélogramme générateur du Réseau du plan donné, on construise un parallélipipède dont la base aura pour aire $S(ghk)$ et dont les arêtes latérales coïncideront en grandeur et en direction avec des paramètres du système de Rangées mnp.

Le nombre de strates parallèles à (ghk) et interceptées dans ce parallélipipède sera égal (Mémoire sur les Systèmes de points, problème XX) à

$$\pm(mg + nh + pk),$$

le signe étant choisi de manière que cette expression soit positive. Donc le volume de ce parallélipipède sera égal à

$$\pm(mg + nh + pk)\,E^3.$$

Mais, d'autre part, en nommant $(\widehat{P, F})$ l'angle compris entre la Rangée mnp et la face (ghk), l'expression de ce volume est aussi

$$P_{mnp}\, S(ghk) \sin(\widehat{P, F}):$$

on déduit de là

$$(65)\qquad \sin(\widehat{\mathrm{P},\mathrm{F}}) = \frac{\pm(mg+nh+pk)\,\mathrm{E}^2}{\mathrm{P}\,mnp\,\mathrm{S}(ghk)} = \frac{\pm(mg+nh+pk)\,\mathrm{E}^2}{\mathrm{P}\,mnp\,\mathrm{P}[ghk]},$$

où il ne reste plus qu'à mettre à la place de $\mathrm{P}\,mnp$, $\mathrm{S}(ghk)$, leurs valeurs tirées des équations (34) et (35).

Deuxième solution. — Posez

$$\frac{1}{\mathrm{E}^2}(g[a]^2 - h[a][b]\cos\varpi - k[a][d]\cos\nu) = m',$$

$$\frac{1}{\mathrm{E}^2}(-g[a][b]\cos\varpi + h[b]^2 - k[b][d]\cos\mu) = n',$$

$$\frac{1}{\mathrm{E}^2}(-g[a][d]\cos\nu - h[b][d]\cos\mu + k[d]^2) = p';$$

$m'n'p'$ sera le symbole de la Rangée normale au plan (ghk). Substituez ces valeurs de m', n', p', dans la formule (36); vous aurez, après réduction des termes du dénominateur,

$$(66)\qquad \mathrm{cotang}(\widehat{\mathrm{P},\mathrm{F}}) = \frac{\sqrt{(np')^2[a]^2+(pm')^2[b]^2+(mn')^2[d]^2-2(np')(pm')[a][b]\cos\varpi-2(np')(mn')[a][d]\cos\nu-2(pm')(mn')[b][d]\cos\mu}}{(mg+nh+pk)\,\mathrm{E}}.$$

On aurait pu de même écrire

$$\frac{1}{\mathrm{E}^2}(ma^2 + nab\cos\delta + pad\cos\beta) = g',$$

$$\frac{1}{\mathrm{E}^2}(mab\cos\delta + nb^2 + pbd\cos\alpha) = h',$$

$$\frac{1}{\mathrm{E}^2}(mad\cos\beta + nbd\cos\alpha + pd^2) = k';$$

$(g'h'k')$ eût été le symbole du plan réticulaire normal à la Rangée mnp : alors, substituant ces valeurs de g', h', k', dans la formule (37), l'on aurait eu, après réduction du dénominateur,

$$(67)\qquad \mathrm{cotang}(\widehat{\mathrm{P},\mathrm{F}}) = \frac{\sqrt{(hk')^2a^2+(kg')^2b^2+(gh')^2d^2+2(hk')(kg')ab\cos\delta+2(hk')(gh')ad\cos\beta+2(kg')(gh')bd\cos\alpha}}{(mg+nh+pk)\,\mathrm{E}}.$$

Ces dernières équations peuvent être utiles dans le cas où $(\widehat{\mathrm{P},\mathrm{F}})$ différerait peu de 90 degrés; car alors non-seulement l'angle serait mal déterminé par son sinus (formule 65), mais même il pourrait y avoir incertitude entre les

deux valeurs supplémentaires données par cette formule. La considération des valeurs de g', h', k', qui alors diffèrent peu de celles de g, h, k, est très-propre à lever l'ambiguïté qui en résulte.

Concevons, comme exemple, que, dans le système sénaire où l'on a

$$a = b, \quad \alpha = \beta = 90^\circ, \quad \delta = 120^\circ,$$

on demande l'angle que l'arète allant du Sommet $(\bar{1}, \bar{1}, 0)$ au Sommet $(0, 0, 1)$ fait avec le plan passant par les Sommets $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, cet angle devant être mesuré dans l'intérieur du tétraèdre formé par ces quatre points. On aura alors

$$a = b, \quad \alpha = \beta = 90^\circ, \quad \delta = 120^\circ, \quad mnp = 111, \quad (ghk) = (111);$$

d'où

$$g' = \frac{a^2}{2E^2}, \quad h' = \frac{a^2}{2E^2}, \quad k' = \frac{d^2}{E^2};$$

le symbole des plans normaux à la Rangée 111 pourra donc s'écrire

$$\left(\frac{a^2}{2d^2}\, \frac{a^2}{2d^2}\, 1\right);$$

celui de ces plans qui passe par le Sommet $(0, 0, 1)$ coupera les axes des x et des y à une distance de l'origine égale à a divisé par $\frac{a^2}{2d^2}$, et ainsi l'angle cherché sera aigu, si $\frac{a^2}{2d^2} < 1$; il sera obtus, si $\frac{a^2}{2d^2} > 1$.

On a ensuite

$$P^2\, 111 = a^2 + d^2,$$
$$P^2\, [111] = 3\, [a]^2 + [d]^2;$$

donc, en ayant égard aux équations (93) du Mémoire sur les Systèmes de points,

$$\sin [111, \widehat{(111)}] = \frac{3E^2}{\sqrt{a^2 + d^2}\, \sqrt{3\,[a]^2 + [d]^2}} = \frac{3}{\sqrt{(a^2 + d^2)\left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{d^2}\right)}},$$

$$\operatorname{tang} [111, \widehat{(111)}] = \frac{3ad}{2d^2 - a^2},$$

formules qu'il serait d'ailleurs facile d'obtenir directement.

§ IX. — *Méthodes pour calculer la densité réticulaire des faces d'un cristal.*

Je nomme *densité réticulaire* (*) d'une face (ghk) le nombre moyen des Sommets contenus dans l'unité de surface : cet élément physique exerce une grande influence sur le mode de limitation du cristal, ainsi que dans les phénomènes du clivage. Il importe donc de le déterminer en fonction des paramètres linéaires ou angulaires de l'Assemblage et des caractéristiques g, h, k ; tel est le but du paragraphe actuel.

Si l'on continue à désigner par $S(ghk)$ la surface de l'aire du parallélogramme générateur du plan (ghk), la densité ρ du Réseau de ce plan aura pour valeur (Mémoire sur les Systèmes de points, page 21),

$$\rho = \frac{1}{S(ghk)}. \tag{68}$$

Le problème, ramené à la mesure de $S(ghk)$, se trouve résolu par la formule générale que je reproduis ici (Mémoire cité, pages 49 et 111),

$$\left\{\begin{aligned} S^2(ghk) = g^2 S^2(100) + h^2 S^2(010) + k^2 S^2(001) &- 2gh S(100) S(010) \cos\varpi \\ &- 2gk S(100) S(001) \cos\nu - 2hk S(010) S(001) \cos\mu. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Il nous reste à examiner comment cette formule se modifie dans les différentes classes d'Assemblages, et suivant les divers modes (hexaédral, octaédral, etc.) de ces classes.

Système asymétrique. — La formule n'offre aucune simplification.

Système binaire, mode hexaédral. — On a

$$\mu = 90^\circ, \quad \nu = 90^\circ, \quad \varpi = \delta,$$

$$S^2(ghk) = g^2 S^2(100) + h^2 S^2(010) + k^2 S(001) - 2gh S(100) S(010) \cos\delta.$$

Dans le système des notations à quatre caractéristiques g, h, i, k, cette formule prend une autre forme. Soit en effet c le paramètre du nouvel axe : on aura d'abord

$$S^2(ghik) = g^2 S^2(10\bar{1}0) + h^2 S^2(01\bar{1}0) + k^2 S^2(0001) - 2gh S(10\bar{1}0) S(01\bar{1}0) \cos\delta;$$

(*) Cet élément a déjà été défini, *Mémoire sur les Systèmes de points*, page 20.

ensuite

$$S(01\bar{1}0) = ad, \quad S(10\bar{1}0) = bd, \quad S(1\bar{1}00) = cd,$$

$$2S(10\bar{1}0)S(01\bar{1}0)\cos\delta = 2abd^2\cos\delta = d^2(c^2 - a^2 - b^2) = S^2(1\bar{1}00) - S^2(10\bar{1}0) - S^2(01\bar{1}0).$$

Substituant, et tenant compte de $g + h + i = 0$, on trouve

$$(70)\quad S^2(ghik) = -ghS^2(1\bar{1}00) - giS^2(10\bar{1}0) - hiS^2(01\bar{1}0) + k^2S^2(0001).$$

On peut introduire dans cette formule les constantes angulaires U, V, W de la page 145. En effet, on déduit facilement des équations (42) et (45),

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(01\bar{1}0)}{S(0001)}, \quad \operatorname{tang} V = -\frac{S(10\bar{1}0)}{S(0001)}, \quad \operatorname{tang} W = -\frac{S(1101)}{S(0001)};$$

donc

$$(71)\quad S^2(ghik) = (-hi\operatorname{tang}^2 U - gi\operatorname{tang}^2 V - gh\operatorname{tang}^2 W + k^2)S^2(0001).$$

Remarquons, en passant, que la formule (48) donne

$$\operatorname{tang}\{\widehat{(ghik), (0001)}\} = \frac{-\sqrt{-hi\operatorname{tang}^2 U - gi\operatorname{tang}^2 V - gh\operatorname{tang}^2 W}}{k};$$

on a donc

$$(72)\qquad S^2(ghik) = k^2 \operatorname{séc}^2\{\widehat{(ghik),(0001)}\}S^2(0001),$$

formule très-simple qui donne l'une des deux quantités

$$S(ghik), \quad \{\widehat{(ghik), (0001)}\},$$

lorsque l'autre est connue. Cette relation a également lieu pour tous les systèmes suivants, qui ne sont que des cas particuliers du système binaire.

Système terbinaire, mode hexaédral rectangle. — On a évidemment, dans ce cas,

$$\mu = 90^\circ, \quad \nu = 90^\circ, \quad \varpi = 90^\circ,$$

$$(73)\qquad S^2(ghk) = g^2S^2(100) + h^2S^2(010) + k^2S^2(001).$$

On peut introduire dans cette formule les constantes angulaires U et V de la

page 148. En effet, on a (formules 52),

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(010)}{S(001)}, \quad \operatorname{tang} V = -\frac{S(100)}{S(001)};$$

donc

(74) $$S^2(ghk) = (g^2 \operatorname{tang}^2 V + h^2 \operatorname{tang}^2 U + k^2) S^2(001).$$

Système quaternaire, mode hexaédral. — La formule (73) devient

(75) $$S^2(ghk) = (g^2 + h^2) S^2(100) + k^2 S^2(001).$$

Pour introduire la constante angulaire U, on posera

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(010)}{S(001)} = -\frac{S(100)}{S(001)};$$

donc

(76) $$S^2(ghk) = (g^2 + h^2 + k^2 \cot^2 U) S^2(100).$$

Système sénaire. — On posera, dans la formule (70),

$$S(1\bar{1}00) = S(10\bar{1}0) = S(01\bar{1}0);$$

on aura

(77) $$\begin{cases} S^2(ghik) = -(gh + gi + hi) S^2(01\bar{1}0) + k^2 S^2(0001) \\ \qquad\quad = \left(\frac{g^2 + h^2 + i^2}{2}\right) S^2(01\bar{1}0) + k^2 S^2(0001). \end{cases}$$

Pour introduire la constante U, on écrira

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(01\bar{1}0)}{S(0001)},$$

et alors

(78) $$S^2(ghik) = \left(\frac{g^2 + h^2 + i^2}{2} + k^2 \cot^2 U\right) S^2(01\bar{1}0).$$

Système terquaternaire, mode hexaédral. — La formule (75) devient

(79) $$S^2(ghk) = (g^2 + h^2 + k^2) S^2(001).$$

Dans les cas non examinés du système ternaire et des divers modes octa-

édraux, dodécaédral, ou hexaédral rhombique, qui dérivent des précédents par des centrages convenablement faits (*), les valeurs de S (ghk), S $(ghik)$ se déduiront des formules précédentes, au moyen des théorèmes que nous allons actuellement démontrer.

THÉORÈME XIII. — *Si l'on centre tous les parallélipipèdes générateurs d'un Assemblage, la face (ghk) conservera l'aire de son parallélogramme générateur si la somme algébrique* g + h + k *est impaire; mais cette aire deviendra moitié moindre, si cette somme est paire.*

Les coordonnées numériques des Sommets introduits par le centrage sont des nombres fractionnaires de la forme,

$$x = m + \tfrac{1}{2}, \quad y = n + \tfrac{1}{2}, \quad z = p + \tfrac{1}{2},$$

m, n, p étant des nombres entiers.

La condition pour que le plan réticulaire (ghk), mené par l'origine des coordonnées, contienne un quelconque des nouveaux Sommets sera donc

$$(80) \qquad gm + hn + kp + \frac{g+h+k}{2} = 0.$$

Dans le cas où $g + h + k$ est impair, le plan (ghk) ne pourra contenir aucun de ces Sommets. Si donc on nomme $S_c(ghk)$ la valeur qu'obtient S (ghk) après le centrage, on aura

$$(81) \qquad S_c(g, h, k = 2j + 1 - g - h) = S(ghk).$$

Dans le cas où $g + h + k$ est pair, l'équation (80) pourra toujours être satisfaite par des valeurs entières de m, n, p, puisqu'elle représentera l'un des plans réticulaires du système (ghk), que ce plan passe ou non par l'origine. Par un quelconque des nouveaux Sommets satisfaisant à l'équation (80), menons un plan parallèle au plan des xz; le plan (ghk) coupera ce plan $y = n + \frac{1}{2}$ suivant une Rangée des nouveaux Sommets, à égale distance entre deux Rangées parallèles d'anciens Sommets situées à la rencontre de

(*) On trouvera, aux pages 95 et suivantes du Mémoire sur les Systèmes de points, les détails qui se rapportent à la manière dont on peut, par le centrage, faire dériver les différents modes cristallins les uns des autres.

ce même plan (ghk) avec les plans $y = 0$, $y = 2n + 1$. Ainsi le nombre des Rangées parallèles à l'intersection de (ghk) avec le plan des xz sera doublé par le centrage; la densité du Réseau deviendra donc deux fois plus considérable, et l'on aura

(82) $$S_c(g, h, k = 2j - g - h) = \tfrac{1}{2} S(ghk).$$

Dans les formules (81) et (82), g, h, k sont trois nombres dépourvus de tout facteur commun, et j est un nombre entier quelconque.

Théorème XIV. — *Si l'on centre, dans les plans* $z = 0$, $z = 1$, *etc., les bases des parallélipipèdes générateurs d'un Assemblage, la face* (ghk) *conservera l'aire de son parallélogramme générateur, si la somme algébrique* $g + h$ *est impaire; mais cette aire deviendra moitié moindre, si* $g + h$ *est un nombre pair.*

Les coordonnées numériques des Sommets introduits par le centrage sont ici,

$$x = m + \tfrac{1}{2}, \quad y = n + \tfrac{1}{2}, \quad z = p,$$

m, n, p étant des entiers.

Alors, si l'on raisonne comme dans le cas précédent, en recourant à la considération du plan auxiliaire $y = n + \frac{1}{2}$, et si l'on désigne par $S_{xy}(ghk)$ ce que devient $S(ghk)$ après le centrage, on trouvera

(83) $$S_{xy}(g, h = 2j + 1 - g, k) = S(ghk),$$

(84) $$S_{xy}(g, h = 2j - g, k) = \tfrac{1}{2} S(ghk).$$

Scolie. — Dans ce dernier cas, le paramètre de la Rangée, trace de (ghk) sur le plan des xy, devient deux fois moindre par l'effet du centrage.

Corollaire. — Si l'on avait centré les parallélogrammes générateurs des faces parallèles au plan des xz, l'on aurait eu de même

(85) $$S_{xz}(g, h, k = 2j + 1 - g) = S(ghk),$$

(86) $$S_{xz}(g, h, k = 2j - g) = \tfrac{1}{2} S(ghk).$$

Si le centrage avait porté sur les faces parallèles au plan des yz, l'on aurait eu

(87) $$S_{yz}(g, h, k = 2j + 1 - h) = S(ghk),$$

(88) $$S_{yz}(g, h, k = 2j - h) = \tfrac{1}{2} S(ghk).$$

THÉORÈME XV. — *Si l'on centre les six faces des parallélipipèdes générateurs d'un Assemblage, l'aire du parallélogramme générateur de la face* (ghk)*.deviendra moitié moindre, si le produit* ghk *est pair, et quatre fois moindre, si le produit* ghk *est impair.*

La condition pour que le plan (ghk) mené par l'origine des coordonnées renferme des Sommets provenant du centrage des faces parallèles au plan des xy est évidemment, comme dans le précédent théorème,

$$g + h = 2j. \tag{89}$$

La condition pour que le même plan renferme des Sommets provenant du centrage des faces parallèles aux xz est

$$g + k = 2j'. \tag{90}$$

La condition pour que ce plan renferme des Sommets provenant du centrage des faces parallèles aux yz est

$$h + k = 2j''. \tag{91}$$

Or, on ne peut avoir en même temps

$$\left\{\begin{array}{l} g + h = 2j \ + 1, \\ g + k = 2j' + 1, \\ h + k = 2j'' + 1; \end{array}\right. \tag{92}$$

donc l'une au moins des équations (89), (90) et (91) sera toujours satisfaite, et il est permis de supposer, dans ce qui va suivre, que c'est l'équation (89) qui se vérifie. Il peut alors se présenter deux cas.

Premier cas, caractérisé par $g + k = 2j' + 1$. — L'une des deux caractéristiques g, k sera paire, et l'on aura, en ajoutant l'équation (89) à la deuxième des équations (92),

$$2g + h + k = 2j + 2j' + 1;$$

alors les équations (90) et (91) manquent à la fois, et l'on retombe sur le cas du théorème XIV et sur l'équation (84); S(ghk) devient moitié moindre après le centrage.

Deuxième cas, caractérisé par $g + k = 2j'$. — Les équations (89), (90) et (91) sont satisfaites toutes les trois. Ainsi, si l'une des caractéristiques est paire, les deux autres sont pareillement paires, et si l'une est impaire, les deux autres le sont aussi. Mais les trois caractéristiques ne peuvent être paires à la fois; elles seront donc toutes les trois impaires, et l'on aura

$$ghk = 2j + 1.$$

Dans ce cas, en vertu du scolie du théorème XIV, le paramètre de la trace de (ghk) sur le plan des xy est rendu deux fois moindre par l'effet du centrage; en outre, il est évident que (ghk) contient des nouveaux Sommets dont les coordonnées sont de la forme

$$x = m, \quad y = n + \tfrac{1}{2}, \quad z = p + \tfrac{1}{2},$$

m, n, p étant convenablement choisis : sa trace sur le plan $z = p + \frac{1}{2}$ sera donc une Rangée comprise entre les deux Rangées déterminées par l'intersection du même plan (ghk) avec les plans $z = 0$, $z = 2p + 1$; le nombre de ces Rangées sera donc deux fois plus considérable après le centrage. La densité du Réseau devient ainsi quatre fois plus grande, et l'aire du parallélogramme générateur quatre fois moindre.

Si l'on représente par $S_f(ghk)$ la nouvelle valeur de $S(ghk)$, après l'opération du centrage, on aura, dans le premier cas,

$$(93) \qquad S_f\left(g, h, k = \frac{2j}{gh}\right) = \frac{1}{2}\,S(ghk),$$

dans le deuxième cas,

$$(94) \qquad S_f\left(g, h, k = \frac{2j+1}{gh}\right) = \frac{1}{4}\,S(ghk).$$

Théorème XVI. — *Lorsque, dans un Assemblage sénaire rapporté à son axe principal pris pour axe des* z, *et à deux de ses axes binaires de première espèce pris pour axes des* x *et des* y, *on ajoute, sur les plans dont l'équation est* $z = p \pm \frac{1}{3}$, *les Sommets nécessaires pour changer l'Assemblage en un Assemblage ternaire dont le Sommet à coordonnées* $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ *fasse partie, le parallélogramme générateur de la face* (ghk) *conservera son aire, si l'on a* $g - h + k = 3j \pm 1$, *et cette aire deviendra trois fois moindre, si l'on a* $g - h + k = 3j$. *Mais, si le nouvel Assemblage con-*

tient le Sommet $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, *la condition pour que* S(ghk) *devienne trois fois moindre sera* $-g+h+k=3j$.

Soit XYZ (*fig.* 2) le triangle formé sur le plan $z=\frac{1}{3}$ par les trois Sommets les plus rapprochés de l'origine des coordonnées O. Dans la figure, ce triangle est vu se projetant orthogonalement sur le plan $z=0$; Ox, Oy sont deux des trois axes binaires de première espèce de l'Assemblage. Les coordonnées du sommet X seront évidemment

$$x=\tfrac{1}{3},\quad y=\tfrac{2}{3},\quad z=\tfrac{1}{3};$$

les coordonnées des Sommets additionnels introduits sur le plan $z=\frac{1}{3}$ seront donc

$$x=m+\tfrac{1}{3},\quad y=n-\tfrac{1}{3},\quad z=\tfrac{1}{3};$$

celles des Sommets introduits sur le plan $z=\frac{2}{3}$ seront de même

$$x=m'+\tfrac{2}{3},\quad y=n'-\tfrac{2}{3},\quad z=\tfrac{2}{3}.$$

Les conditions pour que le plan (ghk) mené par l'origine contienne une partie de ces nouveaux Sommets seront donc

$$(95)\qquad \begin{cases} gm+hn+\dfrac{(g-h+k)}{3}=0, \\ gm'+hn'+\dfrac{2(g-h+k)}{3}=0. \end{cases}$$

Si donc $g-h+k$ est de la forme $3j\pm 1$, le plan (ghk) mené par l'origine ne pourra contenir aucun de ces Sommets, et, si l'on désigne par $S_r(ghk)$ la valeur de l'aire S(ghk) après le triplement des Sommets de l'Assemblage, on aura

$$(96)\qquad S_r(g, h, k=3j\pm 1-g+h)=S(ghk);$$

mais, si $g-h+k$ est divisible par 3, les traces du plan (ghk) sur les plans $z=\frac{1}{3}$, $z=\frac{2}{3}$ seront des Rangées de nouveaux Sommets dans le nouvel Assemblage, la densité du Réseau deviendra trois fois plus considérable, et, par conséquent, l'on aura

$$(97)\qquad S_r(g, h, k=3j-g+h)=\tfrac{1}{3}S(ghk).$$

Si l'on avait adopté la forme rhomboédrique inverse (Mémoire sur les Systèmes de points, page 73) correspondant au triangle X'Y'Z' (*fig.* 2), le nouvel Assemblage aurait contenu le Sommet Y' dont les coordonnées sont $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Les coordonnées des nouveaux Sommets auraient été comprises dans les deux systèmes de formules

$$x = m + \tfrac{1}{3}, \quad y = n + \tfrac{1}{3}, \quad z = p + \tfrac{1}{3},$$
$$x = m' + \tfrac{2}{3}, \quad y = n' + \tfrac{2}{3}, \quad z = p' + \tfrac{2}{3},$$

et les équations (96), (97) se seraient changées en

$$(98) \qquad S_{r'}(g, h, k = 3j \pm 1 + g - h) = S(ghk),$$

$$(99) \qquad S_{r'}(g, h, k = 3j + g - h) = \tfrac{1}{3} S(ghk).$$

Théorème XVII. — *Lorsque, dans un Assemblage sénaire rapporté à son axe principal commè axe des* z, *et à deux de ses axes binaires de première espèce comme axes des* x *et des* y, *on centre tous les triangles équilatéraux des plans réticulaires parallèles aux* xy, *la face* (*ghk*) *conserve l'aire de son parallélogramme générateur, si* g — h *n'est pas divisible par* 3, *et cette aire devient trois fois moindre dans le cas contraire.*

Soient X, Y', Z, X',... (*fig.* 2) les nouveaux Sommets introduits par ce mode de centrage, et situés sur le plan $z = 0$. Ces Sommets se partagent en deux groupes, l'un dont les coordonnées sont exprimées par

$$x = m - \tfrac{1}{3}, \quad y = n + \tfrac{1}{3}, \quad z = 0,$$

l'autre dont les coordonnées sont

$$x = m + \tfrac{1}{3}, \quad y = n - \tfrac{1}{3}, \quad z = 0.$$

La condition pour que le plan (*ghk*) mené par l'origine contienne une partie de ces Sommets sera

$$(100) \qquad gm + hn \pm \frac{g-h}{3} = 0.$$

Si donc l'on a $g - h = 3j \pm 1$, le plan (*ghk*) ne pourra contenir aucun de ces Sommets, et si l'on nomme $S_t(ghk)$ ce que devient $S(ghk)$ après le

centrage, on aura

(101) $$S_b(g, h = 3j \pm 1 - g, k) = S(ghk).$$

Mais si $g - h$ est divisible par 3, la trace de (ghk) sur le plan $z = 0$ contiendra des Sommets provenant des deux nouveaux groupes; il est facile de voir que le paramètre de cette Rangée sera devenu trois fois moindre, et que l'aire $S(ghk)$ aura diminué dans le même rapport. Ainsi l'on aura

(102) $$S_b(g, h = 3j - g, k) = \frac{1}{3} S(ghk).$$

§ X. — *De la détermination du mode cristallin et de la forme primitive d'une espèce minérale.*

Lorsque l'on connaît le système cristallin auquel se rapporte une espèce minérale, il reste à déterminer le mode particulier auquel elle appartient, et les paramètres linéaires qui achèvent de fixer la forme du solide générateur de son Assemblage.

On peut conserver à ce solide le nom de forme primitive, ses faces étant toujours parallèles à celles d'une ou de plusieurs des formes cristallines de la substance. Une molécule est supposée placée à chacun des sommets de ce polyèdre, quelquefois aussi en son centre de figure, ou même sur chacun des centres de ses faces.

Deux formes primitives, ou, ce qui revient au même, deux solides générateurs de l'Assemblage, sont équivalents lorsqu'ils donnent naissance au même Assemblage : on a alors une seule solution du problème de la détermination de la forme primitive, mais présentée de deux manières différentes.

Pour les cristaux appartenant au système régulier ou terquaternaire, la question doit être considérée comme résolue, dès que l'on sait si l'Assemblage terquaternaire est constitué suivant le mode hexaédral, octaédral ou dodécaédral.

Dans les systèmes sénaire, quaternaire et ternaire, il n'existe que deux paramètres distincts, dont l'un peut être pris pour unité; l'autre paramètre forme ainsi la seule inconnue de la question.

Dans le système terbinaire, le minéralogiste devra d'abord fixer son choix sur l'un des quatre modes qui dépendent de ce système; ensuite il devra

déterminer deux des trois paramètres linéaires a, b, d; le troisième pourra toujours être supposé égal à l'unité.

Le système binaire présente quatre paramètres linéaires a, b, c, d; si l'on suppose $d = 1$, il restera à calculer a, b et c, c'est-à-dire les trois côtés du triangle principal du Réseau normal à l'axe binaire du système; il faudra pareillement opter entre les deux modes cristallins qui dépendent de ce système, et si l'on adopte le mode octaédral, on devra, suivant la remarque faite dans mon Mémoire sur les Systèmes de points (note de la page 97), déterminer sur lequel des trois côtés du triangle principal du Réseau normal à l'axe se projette le Sommet, centre du prisme générateur.

Enfin, dans le système asymétrique, le nombre des indéterminées réellement distinctes est égal à cinq : ce sont, par exemple, les cinq arêtes du tétraèdre principal, la sixième étant prise pour unité de longueur.

Pour obtenir la valeur des paramètres, nous avons à notre disposition la connaissance des inclinaisons des faces qui limitent le cristal, et les indices tirés de la disposition des plans de clivage. Il en résulte qu'après avoir déterminé un système de trois paramètres linéaires a, b, d, satisfaisant aux conditions tirées de ces indices, nous pouvons, sans cesser pour cela de rendre compte de la structure extérieure, remplacer a, b, d par trois autres paramètres ma, nb, pd de même direction relative, mais dont les rapports de grandeur ne sont plus les mêmes; m, n, p sont ici des nombres entiers qui peuvent être quelconques, sauf dans le cas où la symétrie exigerait l'égalité de deux ou de trois de ces paramètres.

Pour lever, autant que possible, l'indétermination relative aux facteurs numériques m, n, p, la règle suivie jusqu'ici par Haüy et ses successeurs a été d'adopter entre les paramètres des rapports de grandeur qui rendent les notations symboliques des faces les plus habituelles du cristal aussi simples que possible. Par exemple, Haüy, en parlant de ses recherches sur l'euclase, s'exprime ainsi : « Je cherchai le rapport que devaient avoir entre elles les « trois dimensions du prisme pour que l'ensemble des lois de décroissement « qui en dériveraient s'écartât le moins qu'il serait possible de la simplicité « des lois ordinaires (*). » Or, l'application d'une telle règle laisse évidem-

(*) Haüy, *Cristallographie*, 2e édition, tome II, page 155.

ment une large part à l'arbitraire, puisque les cristallographes ne sont même pas d'accord entre eux sur les symboles des faces, et que la même face, de notation simple pour un auteur, offre souvent une notation beaucoup plus complexe dans le système d'un autre auteur. Aussi les minéralogistes ont-ils coutume d'abandonner la question, lorsqu'elle a été poussée jusqu'à ce point qu'un, deux ou trois systèmes de valeurs de m, n, p rendent un compte suffisamment simple de la structure extérieure; cependant des deux ou trois solutions qui ont pu être ainsi obtenues, une seule est celle de la nature.

Pour lever autant que possible cette indétermination, je vais employer une hypothèse qui n'offrira point, il est vrai, le degré de rigueur des résultats auxquels nous avons été conduits jusqu'ici, mais qui aura sur les méthodes anciennes l'avantage d'avoir un point d'appui théorique, celui de ne laisser qu'une faible part à l'arbitraire du calculateur, et enfin, d'offrir les vérifications les plus variées.

J'admettrai que, dans un Assemblage cristallin, les plans réticulaires les plus faciles à séparer de leurs limitrophes par l'opération du clivage sont, *en général*, ceux qui servent de limites aux strates de plus grande épaisseur.

Voici les considérations théoriques qui militent en faveur de cette manière de voir.

Lorsque le clivage sépare l'un de l'autre deux plans réticulaires voisins, on a à considérer, d'une part, la force avec laquelle les molécules d'un même plan se retiennent l'une l'autre, force qui est la *cohésion tangentielle au plan*, ou la résistance à la rupture suivant des lignes menées dans ce plan; on a à considérer, d'autre part, la force avec laquelle les molécules du plan retiennent à proximité les molécules du plan limitrophe, force que l'on peut nommer la *cohésion normale au plan*, ou la résistance à la rupture suivant la direction parallèle à ce plan. Or on sait qu'en général la cohésion des corps est d'autant plus grande que les intervalles moyens des molécules sont plus petits. D'après cela, il est permis de penser que, toutes choses d'ailleurs égales, la cohésion tangentielle sera d'autant plus grande que le Réseau du plan sera plus dense, et que la cohésion normale sera d'autant plus faible que l'écartement des deux plans limitrophes sera plus considérable.

Lorsque l'on examine l'un après l'autre les divers systèmes de plans réticulaires du cristal, la densité du Réseau et l'écartement des deux plans limi-

trophes pour chacun de ces systèmes sont deux quantités qui croissent et décroissent ensemble, restant toujours proportionnelles l'une à l'autre. On a, en effet, d'après l'équation (51) du Mémoire sur les Systèmes de points,

$$\Delta\,S(ghk) = \Omega = \text{constante},$$

et, par conséquent (équation 68 du Mémoire actuel),

$$\Delta = \Omega\rho.$$

Ainsi, à mesure que l'on considérera des faces dont la densité réticulaire sera de plus en plus grande, on verra la cohésion tangentielle augmenter et la cohésion normale diminuer; par conséquent, la tendance au clivage suivant ces faces deviendra de plus en plus évidente, puisque la cohésion tangentielle le favorise, tandis que la cohésion normale tend à le prévenir. Donc le clivage le plus facile devra se faire parallèlement au plan réticulaire de densité maximum, et, si le cristal est clivable parallèlement à deux ou à trois formes cristallines, l'ordre de facilité de ces clivages devra correspondre à l'ordre des densités décroissantes des tissus réticulaires correspondants.

On démontrera, à peu près de même, que les faces les plus aptes à se produire dans l'acte de la cristallisation, ou, en d'autres termes, les plans réticulaires les plus aptes à limiter le cristal, sont aussi, *en général,* ceux dont la densité réticulaire est la plus considérable; car les mouvements internes qui agissent incessamment sur la superficie de la masse cristalline en voie de formation jouent, jusqu'à un certain point, le rôle des forces extérieures qui s'emploient à cliver un cristal; ils ont dû, par conséquent, respecter de préférence les séries moléculaires qui se trouvent disposées suivant des plans réticulaires dont les Réseaux ont les tissus les plus serrés. A ce point de vue, la faculté de limitation effective que possède chaque face possible du cristal doit être, au moins en partie, proportionnelle à la densité de son tissu. Toutefois, ce critérium paraît devoir être moins certain que celui que l'on déduit de la considération du clivage; car la formation des faces naturelles s'est trouvée soumise, pendant la cristallisation, à une multitude de forces étrangères, difficiles à analyser, et qui ont pu favoriser la production de telle ou telle forme cristalline, ou même ne pas agir également sur les différents côtés du cristal. Au contraire, lorsque le cristal définitivement consti-

tué est soumis ultérieurement aux épreuves du clivage, il se trouve soustrait à toute trace de l'action des forces qui ont modifié primordialement sa structure extérieure (*), et peut fournir aux observateurs des indices indépendants de son état initial.

Nous nous résumons en énonçant nettement la règle que nous substituons à la loi empirique des notations les moins complexes, et cette règle nous servira désormais à déterminer le mode cristallin d'une espèce minérale, ainsi que les rapports de ses paramètres. Nous devrons, dans chaque cas particulier, « choisir parmi le nombre infini de solutions que comporte la « détermination de la forme primitive, celle qui assigne aux diverses faces « possibles du cristal des densités réticulaires dont la série décroissante « représente aussi exactement que possible la série décroissante des facilités « de production, soit naturelle (par la cristallisation), soit artificielle (par le « clivage) de ces mêmes faces » : il est sous-entendu que la facilité de production naturelle des faces se constatera par l'examen attentif d'un très-grand nombre d'échantillons de la même espèce, recueillis dans des circonstances aussi variées que possible.

Dans le cas où les indices déduits du clivage ne seraient pas complétement d'accord avec ceux tirés de l'examen des formes extérieures dominantes, notre règle laissera quelque prise à l'arbitraire, jusqu'à ce qu'une application suivie de la méthode nous ait mis à même de juger du degré de confiance que méritent ces divers indices.

Cette concordance d'un certain genre de clivage avec les rapports de longueur des paramètres linéaires a déjà été remarquée par M. Frankenheim (**), qui fait observer notamment que, dans les cristaux quaternaires de l'apophyllite et de l'uranite, où $a < d$, le clivage est parallèle à la base.

La densité réticulaire de la face (ghk) ayant pour valeur

$$\frac{1}{S(ghk)},$$

(*) Cette proposition ne doit pas être acceptée dans un sens trop rigoureux : la même espèce minérale n'a pas toujours les mêmes clivages également faciles ; mais les variations sont beaucoup moins étendues que celles qui se manifestent dans le degré de prédominance des mêmes faces, entre divers échantillons de la même espèce.

(**) FRANKENHEIM, *die Lehre von der Cohæsion*, page 306.

au lieu d'ordonner les faces suivant les valeurs décroissantes de cette expression, nous pourrons les ranger suivant les valeurs croissantes de l'aire élémentaire $S(ghk)$, ou plutôt du carré de cette aire, afin d'éviter les radicaux du second degré.

S'il existe dans $S(ghk)$, ou dans $S^2(ghk)$, des facteurs indépendants de g, h, k, nous pourrons les supprimer, sans troubler l'ordre suivant lequel se succèdent les formes cristallines. Nous désignerons donc par $\Sigma(ghk)$, $\Sigma^2(ghk)$ ce que deviennent les valeurs de $S(ghk)$, $S^2(ghk)$ débarrassées de semblables facteurs, et après avoir remplacé, dans les équations (69) à (102), S, S^2 par Σ, Σ^2, nous pourrons supprimer ou introduire dans leurs seconds membres un facteur quelconque, pourvu qu'il ne soit pas fonction des caractéristiques.

Nous allons maintenant appliquer les formules du § IX à chacun des quatorze modes cristallins.

Système terquaternaire, mode hexaédral.

Les trois axes quaternaires sont pris pour axes coordonnés; les paramètres sont a, a, a. On a (formule 79)

$$S^2(ghk) = (g^2 + h^2 + k^2)\, S^2(001),$$

et, si l'on change S^2 en Σ^2,

$$\Sigma^2(ghk) = g^2 + h^2 + k^2. \tag{103}$$

La deuxième colonne du Tableau n° I a été calculée sur cette formule.

Système terquaternaire, mode octaédral.

Ce mode dérive du précédent par le centrage des six faces du cube.

Élevez au carré les équations (93) et (94), changez-y S^2 en Σ^2, remplacez $\Sigma^2(ghk)$ par sa valeur tirée de (103), et multipliez les seconds membres par 16; vous aurez

$$\Sigma_f^2\left(g, h, k = \frac{2j+1}{gh}\right) = g^2 + h^2 + k^2,$$

$$\Sigma_f^2\left(g, h, k = \frac{2j}{gh}\right) = 4\,(g^2 + h^2 + k^2).$$

On peut réunir ces deux formules en une seule et écrire

$$(104)\qquad \Sigma_f^2(g, h = 2j - g,\quad k = 2j' - g) = g^2 + h^2 + k^2,$$

en sous-entendant que, dans le cas où les relations

$$h = 2j - g,\quad k = 2j' - g,$$

n'auraient pas lieu, on les obtiendrait de force, en multipliant les trois caractéristiques g, h, k par le nombre 2. Sous cette réserve, l'équation (104) remplace, à elle seule, les deux précédentes : elle a servi à calculer la quatrième colonne du Tableau n° I.

Système terquaternaire, mode dodécaédral.

Ce mode dérive du mode hexaédral, en centrant chacun des cubes de ce dernier en son centre de figure.

Élevez au carré les équations (81) et (82), changez-y S^2 en Σ^2, remplacez $\Sigma^2(ghk)$ par sa valeur tirée de (103), et multipliez les seconds membres par 4; vous aurez

$$(105)\qquad \begin{aligned} &\Sigma_c^2(g, h, k = 2j - g - h) = g^2 + h^2 + k^2,\\ &\Sigma_c^2(g, h, k = 2j + 1 - g - h) = 4(g^2 + h^2 + k^2). \end{aligned}$$

La première de ces deux formules suffit, si l'on sous-entend que, dans le cas où la relation

$$k = 2j - g - h$$

ne serait pas satisfaite, on la rétablirait en multipliant g, h, k par 2. La sixième colonne du Tableau n° I a été calculée au moyen de cette équation.

Remarques sur le système terquaternaire. — Dans le mode hexaédral, le cube doit être la forme dominante; après lui vient la forme {110} qui représente le dodécaèdre rhomboïdal. Le sel gemme, le plomb sulfuré me paraissent appartenir au mode hexaédral.

Dans le mode octaédral, c'est l'octaèdre {111} qui domine; la forme cubique {100} doit aussi se présenter fréquemment. Le diamant, l'alun, le spinelle, plusieurs métaux natifs semblent dépendre du mode octaédral. Les piles de boulets offrent un exemple de ce genre d'arrangement.

Dans le mode dodécaédral, la forme dominante est le dodécaèdre rhomboïdal {110}; la forme octaédrique n'occupe plus que le cinquième rang. Les grenats, la tennantite doivent se rapporter au mode dodécaédral.

Quelquefois le cristal a des clivages octaédriques, et cependant sa forme dominante est le cube: exemples, le bismuth et le spath fluor; ces substances me paraissent devoir être rangées parmi les substances octaédrales.

Système sénaire.

L'axe sénaire est pris pour axe des z; son paramètre est égal à d. Les axes binaires de première espèce OG, OH (*fig.* 2) sont pris pour axes des x et des y; OI est l'axe auxiliaire auquel se rapporte la caractéristique additionnelle : leurs paramètres sont a, a, a. La notation est à quatre caractéristiques. On a alors (formule 78),

$$S^2\,(ghik) = (g^2 + h^2 + i^2 + k^2.2\cot^2 U)\,\tfrac{1}{2}\,\Sigma^2(01\bar{1}0).$$

Dans cette équation, changez S^2 en Σ^2, supprimez le facteur $\frac{1}{2}\Sigma^2\,(0110)$, et posez, pour abréger,

(106) $$2\cot^2 U = \lambda;$$

vous aurez

(107) $$\Sigma^2\,(ghik) = g^2 + h^2 + i^2 + k^2\lambda.$$

Le Tableau n° II a été calculé sur cette formule.

Pour les birhomboèdres de première espèce, on a

$$\Sigma^2\,(g\,o\,\bar{g}k) = 2g^2 + k^2\lambda;$$

pour les birhomboèdres de deuxième espèce, on a

$$\Sigma^2\,(gg\,\overline{2g}k) = 6g^2 + k^2\lambda.$$

Ainsi les formes parallèles de première espèce doivent l'emporter sur celles de deuxième espèce, quant à leur aptitude à se produire dans l'acte de la cristallisation, et quant à leur tendance à résulter du clivage. On choisira donc les axes binaires de première espèce, de manière à ce qu'ils soient

parallèles aux formes dominantes; cette remarque lèvera l'ambiguïté relative à la direction que l'on doit donner aux axes de première et de deuxième espèces, dans l'intérieur du cristal.

Parmi les formes obliquement placées par rapport à l'axe sénaire, la forme dominante sera le birhomboèdre de première espèce $\{10\bar{1}1\}$.

On déterminera l'angle U, soit par une mesure directe, soit indirectement par la mesure de l'angle que forment entre elles deux faces de $\{10\bar{1}1\}$.

On pourrait aussi déduire U, et par suite le rapport $\frac{a}{d}$, de la connaissance de l'angle que fait une face oblique quelconque $(ghik)$ avec le plan normal à l'axe sénaire; car la formule (56), appliquée à ce cas, donne

$$\operatorname{tang}\left[\widehat{(ghik),(0001)}\right] = \frac{-\sqrt{(g^2+h^2+i^2)\,2\cot^2 U}}{k.2\cot^2 U},$$

(108) $$2\cot^2 U = \frac{g^2+h^2+i^2}{k^2}\cot^2\{\widehat{(ghik),(0001)}\}.$$

On adoptera d'une manière définitive le rapport $\frac{a}{d}$, si l'ordre de prédominance théorique des diverses formes se trouve conforme à celui que l'observation directe d'un grand nombre d'échantillons aura fait découvrir.

Je citerai comme exemples :

1°. L'apatite qui, d'après les observations de M. Descloizeaux, fournit les valeurs $a = 1$, $d = 0{,}735$, d'où $\lambda = 2{,}78$.

Les formes dominantes sont :

Le prisme hexaèdre de première espèce $\{10\bar{1}0\}$ $(\Sigma^2 = 2{,}00)$; c'est parallèlement à ces faces qu'a lieu le principal clivage;

Les troncatures terminales $\{0001\}$ $(\Sigma^2 = 2{,}78)$; faibles signes de clivage dans ce sens;

Le birhomboèdre de première espèce $\{10\bar{1}1\}$ $(\Sigma^2 = 4{,}78)$;

Le prisme hexaèdre de deuxième espèce $\{11\bar{2}0\}$ $(\Sigma^2 = 6{,}00)$;

Le birhomboèdre de deuxième espèce $\{11\bar{2}1\}$ $(\Sigma^2 = 8{,}78)$;

Le birhomboèdre de première espèce $\{20\bar{2}1\}$ $(\Sigma^2 = 10{,}78)$;

Le birhomboèdre de première espèce $\{10\bar{1}2\}$ $(\Sigma^2 = 13{,}12)$;

Le prisme dodécaèdre $\{21\bar{3}0\}$ $(\Sigma^2 = 14{,}00)$; ordinairement hémiédrique;

Le didodécaèdre $\{21\bar{3}1\}$ ($\Sigma^2 = 16{,}78$); hémiédrique;

Rarement le birhomboèdre de deuxième espèce $\{11\bar{2}2\}$ ($\Sigma^2 = 17{,}12$).

Si une nouvelle forme venait à se montrer, on peut présumer que cette forme serait le birhomboèdre de première espèce $\{30\bar{3}1\}$.

2°. L'émeraude, pour laquelle on admet généralement $a = 1$, $d = 1$, d'où $\lambda = 1{,}50$. Ces valeurs expliquent le clivage qu'offre l'émeraude parallèlement à ses bases; mais la série des formes dominantes est plus exactement représentée par le système d'équations

$$a = 1, \quad d = 0{,}50, \quad \lambda = 6{,}00;$$

les formes dominantes, rangées suivant les valeurs de Σ^2, sont alors $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$, $\{20\bar{2}1\}$, $\{21\bar{3}0\}$, série qui s'accorde assez exactement avec les rapports de fréquence qu'indique l'observation d'un grand nombre d'échantillons de cette espèce minérale.

Ici les indices tirés du clivage ne sont pas complétement d'accord avec ceux déduits de la structure extérieure; on peut toutefois espérer que l'ambiguïté qui en résulte pourra être levée, dans un état plus avancé de nos connaissances cristallographiques.

3°. Le plomb phosphaté, le plomb arséniaté, la néphéline, la chlorite hexagonale.

4°. Le cuivre sulfuré, le cadmium sulfuré. Ces deux substances sont remarquables par la prédominance des formes de première espèce, d'où résulte la coordination des faces en trois zones ayant pour axes les axes binaires de première espèce du système cristallin. Cette prédominance paraît devoir être attribuée à la petitesse des valeurs de λ. En effet :

Dans le cadmium sulfuré, $a = 1$, $d = 1{,}63$, $\lambda = 0{,}565$,

$$\Sigma^2\{10\bar{1}1\} = 2{,}565, \quad \Sigma^2\{10\bar{1}2\} = 4{,}260, \quad \Sigma^2\{10\bar{1}3\} = 7{,}085,$$

et pour le premier birhomboèdre de deuxième espèce, $\Sigma^2\{11\bar{2}1\} = 6{,}565$.

Dans le cuivre sulfuré, $a = 1$, $d = 1{,}708$, $\lambda = 0{,}514$,

$$\Sigma^2\{10\bar{1}1\} = 2{,}514, \quad \Sigma^2\{10\bar{1}2\} = 4{,}056, \quad \Sigma^2\{10\bar{1}3\} = 6{,}626,$$

et pour le premier birhomboèdre de deuxième espèce, $\Sigma^2\{11\bar{2}1\} = 6{,}514$.

5°. Le quartz, l'un des minéraux dont la cristallisation offre le plus de particularités intéressantes, et que l'on a coutume de rapporter au système rhomboédrique. Malgré l'opinion dominante à cet égard, il me paraît probable que la symétrie de l'Assemblage moléculaire est sénaire. Je reviendrai sur ce sujet en traitant de l'hémiédrie du quartz et des hémitropies auxquelles elle donne lieu.

6°. Et probablement plusieurs autres substances que l'on range dans le système rhomboédrique, mais qui ne paraissent rhomboédriques que par un effet d'hémiédrie.

Système quaternaire, mode hexaédral.

L'axe quaternaire est pris pour axe des z; son paramètre est égal à d. Les axes binaires de première espèce sont pris pour axes des x et des y; leurs paramètres sont a, a. Dans la formule (76), changez S^2 en Σ^2, divisez le second membre par $\Sigma^2(100)$, et posez, pour abréger,

$$(109) \qquad \cot^2 U = \lambda;$$

vous aurez

$$(110) \qquad \Sigma^2(ghk) = g^2 + h^2 + k^2\lambda.$$

La moitié supérieure du Tableau n° III a été calculée sur cette formule.

Les birhomboèdres du système sénaire sont ici remplacés par des octaèdres qui peuvent être de première espèce, si leurs faces sont parallèles aux axes binaires de première espèce, ou de deuxième espèce, si elles sont parallèles aux axes de deuxième espèce.

Le symbole général des octaèdres de première espèce est $\{go k\}$; le prisme $\{100\}$ en est un cas particulier.

Le symbole général des octaèdres de deuxième espèce est $\{ggk\}$; le prisme $\{110\}$ en est un cas particulier.

Pour les octaèdres de première espèce, on aura donc

$$\Sigma^2(gok) = g^2 + k^2\lambda,$$

et pour les octaèdres de deuxième espèce,

$$\Sigma^2(ggk) = 2g^2 + k^2\lambda.$$

Ainsi les formes de première espèce sont les formes dominantes ; cette circonstance servira à fixer la position des axes binaires de première espèce.

Parmi les formes obliquement placées, par rapport à l'axe quaternaire, la forme dominante sera l'octaèdre {101}.

On déterminera par une mesure directe, ou indirectement par la mesure de l'angle que forment entre elles deux faces de {101}, l'inclinaison U de la face (101) sur la face (001).

Connaissant U, on aura facilement le rapport $\frac{d}{a}$.

L'idocrase, le mésotype, le plomb molybdaté me paraissent appartenir au mode hexaédral.

Système quaternaire, mode octaédral.

Ce mode dérive du précédent par le centrage des prismes droits en leur centre de figure.

Élevez au carré les équations (81) et (82), changez-y S^2 en Σ^2, remplacez $\Sigma^2(ghk)$ par sa valeur tirée de (110), et multipliez les seconds membres par 4; vous aurez

$$(111) \qquad \begin{aligned} &\Sigma_c^2(g, h, k = 2j - g - h) = g^2 + h^2 + k^2\lambda, \\ &\Sigma_c^2(g, h, k = 2j + 1 - g - h) = 4(g^2 + h^2 + k^2\lambda). \end{aligned}$$

La première de ces deux formules peut remplacer la seconde, si l'on sous-entend que, dans le cas où la relation

$$k = 2j - g - h$$

n'aurait pas lieu, on l'établirait en doublant les trois caractéristiques g, h, k.

La moitié inférieure du Tableau n° III a été calculée sur la formule (111).

Dans les formes prismatiques parallèles à l'axe principal, c'est le prisme de deuxième espèce {110} qui doit dominer: au contraire, parmi les formes inclinées à l'axe quaternaire, c'est l'octaèdre de première espèce {101} qui sera la forme principale. On voit que dans le mode octaédral, la combinaison dominante sera le prisme {110} terminé par les pointements octaédriques {101} qui alterneront avec les faces du prisme. Dans le mode hexaédral, au contraire, la combinaison dominante sera le prisme droit {100}

muni de ses bases {001}. Cette circonstance pourra servir à distinguer les deux modes l'un de l'autre.

Si l'on adopte le mode octaédral, les axes binaires de première espèce devront être placés parallèlement aux faces de l'octaèdre {101}.

Si, le cristal étant rapporté à ses axes binaires de première espèce, on veut le rapporter à ses axes binaires de deuxième espèce, ou *vice versâ*, si l'on veut passer des axes de deuxième espèce aux axes de première espèce, on changera les notations des faces en remplaçant (ghk) par $(g+h, g-h, k)$.

Dans le mode octaédral rapporté à ses axes binaires de première espèce, les formes à somme algébrique des caractéristiques divisible par 2 sont plus fréquentes que les formes à somme impaire; c'est l'inverse dans le mode hexaédral.

L'apophyllite, le rutile, le zircon me paraissent devoir être rangés parmi les cristaux du mode quaternaire octaédral.

Système ternaire.

L'axe ternaire est pris pour axe des z; son paramètre est égal à d. Les axes binaires OG, OH, OI (*fig.* 2) sont pris pour axe des x, pour axe des y et pour axe auxiliaire; leurs paramètres sont a, a, a. La notation est à quatre caractéristiques.

Dans le système ternaire, il ne peut y avoir aucun doute sur la position des trois axes coordonnés du plan des xy, attendu qu'il n'y a point d'axes binaires de deuxième espèce : les intersections des trois plans de symétrie avec le plan des xy les remplacent. La symétrie extérieure du cristal indiquera toujours sans ambiguïté comment sont placés les axes binaires, comment sont placés les plans de symétrie.

Un Assemblage ternaire peut être considéré comme dérivant d'un Assemblage sénaire trois fois moins riche en Sommets (Mémoire sur les Systèmes de points, page 73). De cet Assemblage sénaire faisons naître un Assemblage à forme rhomboédrique directe, c'est-à-dire dont le rhomboèdre générateur ait pour symbole $\{01\bar{1}1\}$: alors, rétablissons dans les équations (96) et (97) la caractéristique i, élevons-les au carré, changeons-y S^2 en Σ^2, remplaçons $\Sigma^2(ghik)$ par sa valeur tirée de (107), et enfin multiplions les seconds

membres par 9; nous aurons

$$(112)\qquad \begin{aligned} &\Sigma_r^2\,(g,h,i,k=3j-g+h)=g^2+h^2+i^2+k^2\lambda,\\ &\Sigma_r^2\,(g,h,i,k=3j\pm 1-g+h)=9\,(g^2+h^2+i^2+k^2\lambda).\end{aligned}$$

La première de ces équations comprend la seconde comme cas particulier, si l'on sous-entend que, dans le cas où la relation $k=3j-g+h$ n'aurait pas lieu, on l'établirait en multipliant par 3 les quatre caractéristiques g, h, i, k.

La moitié supérieure du Tableau n° IV a été calculée d'après l'équation (112), qui suppose que la face $(01\bar{1}1)$ appartient au rhomboèdre générateur de l'Assemblage.

Mais si l'Assemblage ternaire était de forme rhomboédrique inverse, c'est-à-dire si la forme $\{10\bar{1}1\}$ représentait le rhomboèdre générateur, on aurait recours aux équations (98) et (99), d'où l'on déduirait facilement

$$(113)\qquad \Sigma_r^2\,(g,h,i,k=3j+g-h)=g^2+h^2+i^2+k^2\lambda.$$

La moitié inférieure du Tableau n° IV est calculée sur cette formule.

Pour l'intelligence du Tableau n° IV, il convient de se rappeler la remarque déjà faite à la page 122 (ligne 3), d'après laquelle il est toujours permis de supposer, dans le symbole $\{ghik\}$ de la forme cristalline, que les deux premières caractéristiques g, h sont positives, ainsi que la dernière k; alors, avec les caractéristiques g, h, i, k on ne peut obtenir que les deux formes distinctes $\{ghik\}$, $\{hgik\}$, et même ces deux formes se confondent en une seule, 1° si l'on a $h=g$, 2° si l'on a $k=0$.

Parmi les formes obliquement placées par rapport à l'axe sénaire, la forme dominante est le rhomboèdre générateur de l'Assemblage. Presque toujours cette forme bien développée caractérise le système ternaire. Lorsqu'elle aura été reconnue dans le cristal soumis à notre examen, nous prendrons arbitrairement l'un des trois axes binaires pour axe des x, et nous placerons le cristal de sorte que son axe ternaire soit vertical, le demi-axe des x positives étant dirigé de la gauche à la droite, et celle des trois faces du pointement supérieur qui est parallèle à l'axe des x étant tournée

vers le spectateur; cette face recevra la notation $(01\bar{1}1)$, et fixera la position du demi-axe des y positives, conformément aux conventions de la page 124.

Si l'on ne prenait pas les précautions que je viens d'indiquer, on pourrait tomber sur la forme rhomboédrique inverse; mais je supposerai toujours que le cristal est ainsi placé, que la face $(01\bar{1}1)$ appartienne au rhomboèdre générateur, et soit orientée d'après les conventions précédentes.

On déterminera, soit par une mesure directe, soit indirectement, l'inclinaison U de la face $(01\bar{1}1)$ sur la face (0001), et l'on aura, comme dans le système sénaire,

$$\lambda = 2\cot^2 U = \frac{3a^2}{2d^2}.$$

On vérifiera cette valeur de λ par d'autres mesures goniométriques, et au moyen de la formule (108) mise sous la forme

$$\tang^2 (\widehat{ghik, 0001}) = \frac{g^2 + h^2 + i^2}{k^2\lambda}.$$

Les trois formes dominantes du système ternaire sont $\{0001\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}0\}$.

Lorsque λ est compris entre 0 et 0,25, les faces $\{0001\}$ sont celles de densité maximum, et c'est normalement à l'axe ternaire que le clivage doit avoir lieu. Ce cas se présente pour tous les rhomboèdres dont l'angle dièdre principal est compris entre 0° et 70° 32′, c'est-à-dire pour les rhomboèdres plus aigus que le tétraèdre régulier, par exemple pour le rhomboèdre de la craïtonite.

Lorsque λ est compris entre 0,25 et 4, les faces de densité maximum sont les faces du rhomboèdre générateur, et c'est parallèlement à ces faces que le clivage doit avoir lieu. Ce cas se présente pour tous les rhomboèdres dont l'angle dièdre principal est compris entre 70° 32′ et 120°, c'est-à-dire pour les rhomboèdres à sommets principaux moins aigus que ceux du tétraèdre régulier, et moins obtus que les angles trièdres du dodécaèdre rhomboïdal, c'est-à-dire pour la grande majorité des cristaux rhomboédri-

ques connus. Aussi, dans le système ternaire, le clivage principal donne-t-il presque toujours un noyau rhomboédrique.

Enfin, lorsque l'on a $\lambda > 4$, et que le rhomboèdre générateur est plus obtus que celui de 120 degrés (tourmaline par exemple), la forme dominante est le prisme hexaèdre de deuxième espèce $\{11\bar{2}0\}$ (prisme tangent aux arêtes latérales du rhomboèdre); mais comme cette forme est ouverte, elle n'exclut pas la forme $\{01\bar{1}1\}$. Il en serait de même dans le cas de $\lambda < 0,25$; la forme $\{0001\}$, étant une forme ouverte, n'exclurait pas $\{01\bar{1}1\}$; de sorte que l'on peut dire, en thèse générale, que « dans tout cristal ternaire, les « faces du rhomboèdre générateur doivent *théoriquement* faire partie du sys- « tème général des faces effectives du cristal. »

Le système ternaire, à cause de la facilité avec laquelle il laisse déterminer sa forme primitive, est très-favorable à la recherche des rapports qui existent entre la densité réticulaire des faces et leur tendance à limiter extérieurement le cristal.

Si l'on avait pris, avec M. Miller, les trois arêtes du rhomboèdre générateur pour axes coordonnés, on trouverait facilement, par les méthodes de transformation de la page 123, la formule suivante,

$$(114)\quad \Sigma^2(ghk) = (k-h)^2 + (g-k)^2 + (h-g)^2 + (g+h+k)^2\lambda.$$

Le Tableau n° V est construit sur cette dernière formule.

Abaques des systèmes sénaire, quaternaire et ternaire. — Dans ces trois systèmes cristallins, la densité réticulaire d'une face (ghk) ou $(ghik)$ dépend de la seule indéterminée λ, que l'on pourrait appeler le *module* du système, et l'on a

$$\Sigma^2(ghk \text{ ou } ghik) = F + f\lambda,$$

F et f étant des fonctions entières des caractéristiques numériques g, h, i, k. Si donc l'on trace sur un plan (*fig.* 7) une série de droites dont les équations en coordonnées linéaires v, λ soient

$$v = F + f\lambda,$$
$$v = F' + f'\lambda,$$
$$v = F'' + f''\lambda, \text{ etc.},$$

(F, f), (F', f'), (F'', f'') étant les différents systèmes de valeurs que fournit, pour les diverses formes cristallines, l'équation

$$\Sigma^2_{\iota}(ghk \text{ ou } ghik) = F + f\lambda,$$

et si l'on affecte à chacune de ces droites la notation de la forme cristalline correspondante, on aura construit un *abaque* du mode cristallin considéré.

La *fig.* 7 représente un pareil abaque pour le système sénaire, et l'on pourrait en construire d'analogues pour le mode quaternaire hexaédral, pour le mode quaternaire octaédral et pour le système ternaire.

L'usage de cet abaque est le suivant : soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, les valeurs particulières du module λ pour les diverses espèces minérales $E_0, E_1, E_2, \ldots$, du système sénaire. Parallèlement à l'axe des ordonnées v, tracez les droites

$$\lambda = \lambda_0, \quad \lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2, \ldots.$$

Pour l'espèce minérale E_0, la manière dont se succèdent les intersections de la droite $\lambda = \lambda_0$ avec chacune des droites représentatives des formes $\{ghik\}$ fera connaître l'ordre *théorique* de la fréquence relative de ces formes et celui de leur facilité au clivage. Il en sera de même pour les autres espèces minérales du même système. On a tracé, en effet, sur l'abaque les lignes verticales correspondant à un certain nombre de ces espèces.

Système terbinaire, mode hexaédral rectangle.

Les trois axes binaires, complétement déterminés de position par la symétrie extérieure du cristal, sont pris pour axes des x, des y et des z : les trois paramètres sont a, b et d ; l'axe des z continue à être placé verticalement.

On a alors, en faisant, pour abréger, dans la formule (74),

(115) $$\operatorname{tang}^2 U = \frac{d^2}{b^2} = \lambda, \quad \operatorname{tang}^2 V = \frac{d^2}{a^2} = \lambda',$$

$$S^2(ghk) = (g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2)\, S^2(001).$$

Dans cette équation, changez S^2 en Σ^2, divisez le second membre par

$\Sigma^2(001)$; il viendra

$$(116) \qquad \Sigma^2(ghk) = g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2.$$

La première partie du Tableau n° VI est calculée d'après cette formule.

Pour déterminer λ et λ', on examinera les formes dominantes appartenant à la zone dont l'expression générale est $\{0hk\}$, ainsi que les formes dominantes des zones dont l'expression générale est $\{g0k\}$ ou $\{gk0\}$.

Dans la zone $\{0hk\}$, après les formes $\{010\}$ et $\{001\}$, vient la forme $\{011\}$, qui pourra servir à déterminer le rapport $b : d$.

On traitera de même les zones $\{g0k\}$ et $\{gh0\}$. Les trois rapports $b : d$, $a : d$, $a : b$, devront satisfaire à l'équation de condition,

$$\frac{b}{d}\frac{a}{b} = \frac{a}{d}.$$

Parmi les formes fermées, la plus fréquente doit être la forme $\{111\}$; on peut aussi l'employer à la détermination des rapports des paramètres.

La forme de plus facile clivage devra être $\{100\}$, $\{010\}$ ou $\{001\}$.

La bournonite, le péridot, paraissent appartenir à ce mode, l'un des moins riches de ce système cristallin.

Système terbinaire, mode hexaédral rhombique.

Ce mode dérive du précédent, par le centrage des bases rectangulaires des prismes droits qui composent l'Assemblage hexaédral.

Élevez au carré les équations (83) et (84), changez-y S^2 en Σ^2, remplacez $\Sigma^2(ghk)$ par sa valeur tirée de (116), et multipliez les seconds membres par 4; vous aurez

$$(117) \qquad \begin{aligned} \Sigma^2_{xy}\{g,\ h = 2j - g,\ k\} &= g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2, \\ \Sigma^2_{xy}\{g,\ h = 2j + 1 - g,\ k\} &= 4(g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2). \end{aligned}$$

La première de ces deux formules embrasse la seconde, si l'on sous-entend que, dans le cas où la relation

$$h = 2j - g$$

ne serait pas satisfaite, on devrait multiplier g, h, k par le nombre 2.

La formule (117) a servi à calculer la deuxième partie du Tableau n° VI.

Les formes dominantes sont, en général, {001} et {110}; leur combinaison donne un cristal en forme de prisme droit ayant pour base un rhombe semblable à la base du prisme générateur.

Lorsque les formes {001}, {110} se combinent avec celle des deux formes {100}, {010} dont l'aire élémentaire est la plus petite, c'est-à-dire avec la forme parallèle à la petite diagonale du rhombe de la base, la combinaison donne un prisme à six faces latérales, ayant pour base sur le plan des xy l'hexagone ABB'A'C'C de la *fig.* 6. Si l'angle CAB diffère peu de 120 degrés, ce prisme aura l'apparence du prisme hexaèdre régulier du système sénaire. Plusieurs substances minérales présentent assez fréquemment cette disposition.

La topaze, la cimophane me paraissent devoir appartenir à ce mode, l'un des plus riches en espèces minérales parmi les quatre modes que renferme le système terbinaire.

J'ai supposé que l'on avait centré les faces parallèles au plan des xy. Si le centrage avait porté sur les faces parallèles aux xz ou aux yz, on aurait eu

$$(118) \qquad \Sigma^2_{xz}\{g, h, k = 2j - g\} = g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2,$$

$$(119) \qquad \Sigma^2_{yz}\{g, h, k = 2j - h\} = g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2.$$

Le plus souvent la structure extérieure dénotera sur lequel des trois plans doit être placée la base rhombe.

Dans le doute, après avoir attribué à a, b, d leurs valeurs supposées, et affecté à chaque face sa notation symbolique, on séparera la série des formes observées en deux groupes, de trois manières différentes : 1° en coupant la série en deux, d'après les valeurs paire ou impaire de $g+h$; 2° en coupant la série, d'après les valeurs paire ou impaire de $g+k$; 3° en coupant la série, d'après les valeurs paire ou impaire de $h+k$. La coupe qui séparera la série en deux groupes les plus inégaux possibles avec prédominance des formes à sommes paires indiquera sur lequel des trois plans coordonnés doit être placée la base rhombe de la forme primitive.

Système terbinaire, mode octaédral rectangle.

Ce mode dérive du mode hexaédral rectangle par le centrage des prismes droits rectangulaires en leur centre de figure.

Élevez au carré les équations (81) et (82), changez-y S^2 en Σ^2, remplacez Σ^2 (ghk) par sa valeur déduite de (116), et multipliez les seconds membres par 4; vous aurez, comme dans le cas du mode quaternaire octaédral,

$$(119) \qquad \Sigma_{\cdot}^2 \{g, h, k = 2j - g - h\} = g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2;$$

il est sous-entendu que, si la somme $g + h + k$ était impaire, on devrait multiplier g, h et k par le nombre 2.

On a calculé, d'après cette formule, la troisième partie du Tableau n° VI.

Les formes {110}, {101}, {011} sont les formes dominantes du mode octaédral rectangle.

La combinaison de deux de ces formes suffit pour clore le cristal sous la figure d'un octaèdre droit à base rectangle, ce qui paraît être l'aspect le plus habituel des cristaux peu chargés de faces de ce mode cristallin.

Si les trois formes coexistaient, il se produirait un dodécaèdre rhomboïdal, analogue au dodécaèdre rhomboïdal du système terquaternaire, mais avec faces inégalement inclinées sur les axes.

Assez souvent celle des trois formes {110}, {101}, {011}, qui est parallèle à l'axe de paramètre maximum, se trouve exclue de la combinaison, et remplacée par celle des trois formes {100}, {010}, {001} qui est normale à cet axe; d'où résulte un octaèdre à base rectangulaire, tronqué parallèlement à cette base.

Ainsi, dans le cuivre chloruré, où l'on a

$$a = 1, \quad b = 0{,}882, \quad d = 1{,}317,$$

le cristal est souvent une combinaison des trois formes {101}, {011}, {001}, qui sont, avec {110}, les formes les plus fréquentes de cette espèce minérale.

Outre le cuivre chloruré, on doit citer comme appartenant à ce mode, le cuivre phosphaté, le cuivre arséniaté octaédral, et peut-être aussi l'arragonite.

Système terbinaire, mode octaédral rhombique.

Ce dernier mode du système terbinaire dérive du mode hexaédral à base rectangle, par le centrage des six faces de ses prismes générateurs.

On traitera les équations (93) et (94) de la même manière que lorsqu'il s'est agi du mode terquaternaire octaédral; on remplacera $\Sigma^2(ghk)$ par sa valeur tirée de l'équation (116), et, après avoir multiplié les seconds membres par 16, on trouvera

$$(120) \qquad \Sigma_f^2(g, h = 2j - g,\ k = 2j' - g) = g^2\lambda + h^2\lambda' + k^2.$$

Dans le cas où l'une quelconque des deux équations de condition

$$h = 2j - g, \qquad k = 2j' - g,$$

ne serait pas satisfaite, on multiplierait g, h et k par le nombre 2.

On trouvera les aires des parallélogrammes générateurs des principales formes de ce mode inscrites dans le dernier quadrant du Tableau n° VI; elles sont calculées par la formule (120).

La forme dominante est {111}; elle peut à elle seule clore le cristal, et lui donner la forme d'un octaèdre droit à base rhombe, quel que soit celui des trois axes que l'on place dans la position verticale.

Cet octaèdre pourra être tronqué sur 2, 4 ou 6 de ses sommets par les formes {100}, {010}, {001}. Lorsqu'il existera quatre troncatures pareilles, et que les faces de troncature se rencontreront, le cristal offrira l'aspect d'un prisme rectangulaire surmonté par des pointements à quatre faces qui alterneront avec les faces du prisme.

La forme {111} suffit à la détermination des rapports des paramètres a, b, d.

Le soufre natif, le silicate de magnésie hydraté (villarsite de M. Dufrénoy), la fluélite et la scorodite (*) paraissent appartenir à ce mode cristallin.

(*) En adoptant pour les paramètres des axes de la scorodite les valeurs

$$a = 1, \quad b = 0{,}869, \quad d = 0{,}958,$$

on trouve pour ses principales formes les symboles {111}, {100}, {010}, {110}, {210}, {021} et {112}; ces formes sont rangées suivant l'ordre de leurs densités réticulaires décroissantes.

Système binaire, mode hexaédral.

L'axe binaire est pris pour axe des z et placé verticalement; son paramètre est égal à d. Les deux Rangées conjuguées OG, OH (*fig.* 1), parallèles à deux des côtés du triangle principal OGI' du Réseau normal à l'axe binaire, sont prises pour axes des x et des y, et sont assemblées entre elles de manière à former un angle obtus; la Rangée diagonale OI est prise pour axe auxiliaire; les paramètres de ces axes sont

$$a = \mathrm{OG}, \quad b = \mathrm{OH}, \quad c = \mathrm{OI},$$

et satisfont aux conditions exprimées par la formule (20). Les notations sont à quatre caractéristiques. On a alors, en posant dans l'équation (71)

(121) $$\operatorname{tang}^2 \mathrm{U} = \lambda, \quad \operatorname{tang}^2 \mathrm{V} = \lambda', \quad \operatorname{tang}^2 \mathrm{W} = \lambda'',$$

(122) $$\mathrm{S}^2 (ghik) = (-hi\lambda - gi\lambda' - gh\lambda'' + k^2)\, \mathrm{S}^2 (0001);$$

changeant S^2 en Σ^2 et supprimant le facteur $\Sigma^2 (0001)$, on trouve

(123) $$\Sigma^2 (ghik) = -hi\lambda - gi\lambda' - gh\lambda'' + k^2 :$$

les nombres $\lambda, \lambda', \lambda''$ sont assujettis à l'inégalité $\lambda < \lambda' < \lambda''$.

On commencera par la détermination des rapports des trois paramètres a, b, c. Pour cela, on observera les formes dominantes dans la zone verticale dont le symbole général est $\{ghi0\}$, et qui a l'axe binaire du système pour son axe de zone.

Ces formes peuvent se diviser en trois groupes :

1°. Les formes $\{01\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$;

2°. Les formes $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$, $\{1\bar{2}10\}$, $\{11\bar{2}0\}$;

3°. Les formes de position indéterminée $\{ghi0\}$.

On aura

$$\Sigma^2\{01\bar{1}0\} = \lambda, \quad \Sigma^2\{10\bar{1}0\} = \lambda', \quad \Sigma^2\{1\bar{1}00\} = \lambda'',$$

$$\Sigma^2\{2\bar{1}\bar{1}0\} = -\lambda + 2\lambda' + 2\lambda'', \ \Sigma^2\{1\bar{2}10\} = 2\lambda - \lambda' + 2\lambda'', \ \Sigma^2\{11\bar{2}0\} = 2\lambda + 2\lambda' - \lambda'';$$

il importe de remarquer que $\lambda, \lambda', \lambda''$ sont proportionnels à $\overline{\mathrm{OG}}^2$, $\overline{\mathrm{OH}}^2$, $\overline{\mathrm{OI}}^2$

(*fig.* 1), et, comme le triangle OGI′ est le triangle principal du Réseau, on a

$$\lambda < \lambda' + \lambda'', \quad \lambda' < \lambda + \lambda'', \quad \lambda'' < \lambda + \lambda'.$$

Ainsi les trois formes $\{10\bar{1}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$, $\{01\bar{1}0\}$ sont les formes dominantes de la zone. De leur combinaison résulte un prisme hexaèdre irrégulier, parallèle à l'axe binaire. Les suppléments des angles dièdres des faces contiguës deux à deux sont les angles O, G, I′ du triangle principal OGI′; les rapports de leurs sinus donneront les rapports des paramètres

$$a : b : c.$$

Après avoir résolu cette première partie du problème, il faudra chercher le paramètre d; pour cela, on observera les pointements ou biseaux qui terminent le cristal vers chacune des extrémités de l'axe binaire. Les formes dominantes seront encore ici des formes parallèles aux axes coordonnés, et ayant pour symboles $\{0h\bar{h}k\}$, $\{g0\bar{g}k\}$, $\{g\bar{g}0k\}$. Les principales seront $\{01\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{1\bar{1}01\}$; dans le cas où ces trois formes sont librement développées, elles forment vers chacun des deux sommets du cristal un pointement à six faces surmontant le prisme hexaèdre irrégulier $\{01\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$.

Après avoir mesuré l'inclinaison de ces faces sur $\{0001\}$ qui est la base supérieure du cristal, on déterminera d au moyen de la formule (49).

Je prendrai comme exemple l'épidote, décrit dans le tome III de la *Minéralogie* de M. Dufrénoy et figuré à la *Pl. CLIV*, *fig.* 54, de l'Atlas de cet ouvrage.

La face M est la face de symbole $(01\bar{1}0)$, parallèle à l'axe des x;

La face g^1 est la face $(10\bar{1}0)$, parallèle à l'axe des y;

La face T est la face $(1\bar{1}00)$, parallèle à l'axe auxiliaire.

L'observation donne

$$\text{Inclinaison de T sur } g^1 = 129^\circ\, 39',$$
$$\text{Inclinaison de T sur M} = 115^\circ\, 41',$$
$$\text{Inclinaison de M sur } g^1 = 114^\circ\, 40'.$$

Suivant la méthode exposée à la page 145, prenons pour unité le dia-

mètre du cercle circonscrit au triangle principal du Réseau du plan $z = 0$: alors a, b, c seront égaux aux sinus des angles opposés, et nous aurons

$$a = \sin 129°39' = 0,7700,$$

$$b = \sin 115°41' = 0,9012,$$

$$c = \sin 114°40' = 0,9087,$$

$$S(0001) = ab \sin(\widehat{x,y}) = abc = 0,6306.$$

Nous aurons ensuite

face P (figure citée) $= (0001)$,
face $c^1 = (01\bar{1}1)$, c^1 sur $P = U = 148°37'$,
face $e^1 = (10\bar{1}1)$, e^1 sur $P = V = 145°6'$,
face $b^1 = (1\bar{1}01)$, b^1 sur $P = W = 145°3'$.

Nous en conclurons, par les formules (45) et (49),

$$d = -abc\frac{\tang U}{a} = 0,500,$$

$$d = -abc\frac{\tang V}{b} = 0,488,$$

$$d = -abc\frac{\tang W}{c} = 0,485,$$

et, en prenant la moyenne arithmétique de ces valeurs,

$$d = 0,491.$$

En déterminant alors λ, λ', λ'' par les formules (121), nous trouverons

$$\lambda = 0,359, \quad \lambda' = 0,492, \quad \lambda'' = 0,501.$$

Si l'on calcule avec ces nombres et la formule (123) les aires des parallélogrammes générateurs des formes que produit la cristallisation de l'épidote, si l'on range ces formes d'après les valeurs croissantes de ces aires, et si l'on compare la série ainsi obtenue avec celle qui exprime leur fréquence relative, on trouvera une concordance très-satisfaisante entre ces deux séries.

Système binaire, mode octaédral.

Ce mode dérive du précédent (*) en centrant les rectangles des faces parallèles à la forme $\{01\bar{1}0\}$, ou à la forme $\{10\bar{1}0\}$, ou à la forme $\{1\bar{1}00\}$. L'axe binaire est pris pour axe des z. Nous avons, sur le plan des xy, trois axes coordonnés, l'axe des x, l'axe des y et l'axe auxiliaire, prolongement de la résultante géométrique des deux autres axes.

Je supposerai que l'on ait centré les faces parallèles aux xz.

Dans l'équation (86), changez S^2 en Σ^2, ajoutez la quatrième caractéristique i, remplacez $\Sigma^2\,(ghik)$ par sa valeur tirée de l'équation (123), enfin multipliez le second membre par 4; vous aurez

$$(124)\qquad \Sigma^2_{xz}\,(g,\,h,\,i,\,k=2j-g) = -hi\lambda - gi\lambda' - gh\lambda'' + k^2.$$

Dans le cas où la relation

$$k = 2j - g$$

n'aurait pas lieu, on multiplierait g, h, i, k par le nombre 2, et cette convention dispenserait de recourir à l'équation (85).

Si l'on avait centré les faces verticales parallèles au plan des yz, on aurait eu de même

$$(125)\qquad \Sigma^2_{yz}\,(g,h,i,k=2j-h) = -hi\lambda - gi\lambda' - gh\lambda'' + k^2.$$

Enfin, si l'on avait centré les faces verticales parallèles à l'axe auxiliaire, en appelant toujours t (*voyez* page 119) les ordonnées parallèles à cet axe, on aurait eu

$$(126)\qquad \Sigma^2_{tz}\,(g,\,h,\,i,\,k=2j-i) = -hi\lambda - gi\lambda' - gh\lambda'' + k^2.$$

Mais revenons à l'équation (124) et au cas d'un centrage parallèle aux xz. Dans la zone verticale des faces désignées par le symbole $\{ghi0\}$ où les caractéristiques g, h et i sont considérées comme variables, on a

$$\Sigma^2\{01\bar{1}0\} = \lambda,\quad \Sigma^2\{10\bar{1}0\} = 4\lambda',\quad \Sigma^2\{1\bar{1}00\} = 4\lambda'',$$
$$\Sigma^2\{2\bar{1}\bar{1}0\} = -\lambda + 2\lambda' + 2\lambda'',$$
$$\Sigma^2\{11\bar{2}0\} = 8\lambda + 8\lambda' - 4\lambda'',\quad \Sigma^2\{1\bar{2}10\} = 8\lambda - 4\lambda' + 8\lambda''.$$

(*) Mémoire sur les Systèmes de points, page 97.

Dans la série des formes normales ou obliques à l'axe binaire, et pour lesquelles la caractéristique k est égale à 1, on a

$$\Sigma^2 \{0001\} = 4,$$

$$\Sigma^2 \{10\bar{1}1\} = \lambda' + 1, \qquad \Sigma^2 \{1\bar{1}01\} = \lambda'' + 1,$$

$$\Sigma^2 \{01\bar{1}1\} = 4\lambda + 4,$$

$$\Sigma^2 \{11\bar{2}1\} = 2\lambda + 2\lambda' - \lambda'' + 1, \quad \Sigma^2 \{\bar{1}211\} = 2\lambda - \lambda' + 2\lambda'' + 1,$$

$$\Sigma^2 \{2\bar{1}\bar{1}1\} = -4\lambda + 8\lambda' + 8\lambda'' + 4.$$

On voit que le cristal sera une combinaison de la forme verticale $\{01\bar{1}0\}$ avec les formes obliques $\{10\bar{1}1\}$, $\{1\bar{1}01\}$; que la forme verticale $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$ naîtra sur l'arête qui sépare les faces $(10\bar{1}0)$, $(1\bar{1}00)$ et tendra à les faire disparaître; enfin, que les formes dominantes dans les pointements qui termineront les deux extrémités de l'axe des z seront en général alternes avec les formes qui domineront dans la zone parallèle à l'axe binaire. Cette alternance produira tout autour de l'axe binaire des endentements de faces, et des arêtes de rencontre obliques au plan de symétrie du cristal, tandis que, dans le mode hexaédral, les arêtes de rencontre sont ordinairement parallèles au plan de symétrie et par conséquent horizontales; c'est là un des meilleurs caractères pour reconnaître, souvent à première vue et avant tout calcul, auquel des deux modes du système binaire appartient le cristal.

Le cristal le plus simple possible est celui produit par la combinaison de $\{01\bar{1}0\}$ avec celle des deux formes $\{10\bar{1}1\}$, $\{1\bar{1}01\}$ dont l'aire du parallélogramme générateur est la plus petite, soit la forme $\{10\bar{1}1\}$; c'est un prisme dont l'axe géométrique est horizontal, qui a pour bases deux rhombes verticaux, et pour faces latérales quatre parallélogrammes parallèles au côté moyen du triangle principal du Réseau du plan des xy. On y reconnaît facilement le prisme rhomboïdal oblique des minéralogistes, placé dans une position qui diffère de 90 degrés de celle qu'on lui assigne habituellement.

L'ordre de prédominance des formes ne sera plus le même, si l'on centre les faces $(1\bar{1}00)$ parallèles à l'axe auxiliaire. On a alors, en se bornant aux

formes les plus simples,

$$\Sigma^2(01\bar{1}0) = 4\lambda, \quad \Sigma^2(10\bar{1}0) = 4\lambda', \quad \Sigma^2(1\bar{1}00) = \lambda'',$$
$$\Sigma^2(11\bar{2}0) = 2\lambda + 2\lambda' - \lambda'',$$
$$\Sigma^2(0001) = 4,$$
$$\Sigma^2(01\bar{1}1) = \lambda + 1, \quad \Sigma^2(10\bar{1}1) = \lambda' + 1, \quad \Sigma^2(1\bar{1}01) = 4\lambda'' + 4.$$

Les formes $\{01\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}1\}$ et $\{1\bar{1}00\}$ tendent à prédominer et à figurer un octaèdre droit ayant pour base un parallélogramme dont les deux angles aigus seront coupés par des plans normaux à cette base, et parallèles à la petite diagonale du parallélogramme ; il pourra même arriver que l'octaèdre se présente sans aucune troncature latérale.

Enfin, dans le cas où l'on centrerait les rectangles des faces $(10\bar{1}0)$ parallèles à l'axe des y, c'est-à-dire, à l'axe de paramètre moyen sur le plan des xy, on obtiendrait les valeurs suivantes :

$$\Sigma^2(01\bar{1}0) = 4\lambda, \quad \Sigma^2(10\bar{1}0) = \lambda', \quad \Sigma^2(1\bar{1}00) = 4\lambda'',$$
$$\Sigma^2(1\bar{2}10) = 2\lambda - \lambda' + 2\lambda'',$$
$$\Sigma^2(0001) = 4,$$
$$\Sigma^2(01\bar{1}1) = \lambda + 1, \quad \Sigma^2(10\bar{1}1) = 4\lambda' + 4, \quad \Sigma^2(1\bar{1}01) = \lambda'' + 1 :$$

dans ce cas, l'aspect extérieur se rapprochera soit de celui des cristaux où le prisme rhomboïdal oblique domine, soit de celui des cristaux dans lequel c'est l'octaèdre droit à base parallélogrammique, selon que la valeur de λ' sera plus rapprochée de celle de λ, ou de celle de λ''.

Les paramètres a, b, c, d se détermineront de même que dans les cristaux du mode hexaédral, comme si deux des quatre faces latérales du parallélipipède générateur n'avaient point été centrées.

Les espèces cristallines que je crois pouvoir signaler à l'attention des minéralogistes comme devant se rapporter au mode binaire octaédral sont l'orthose, la chaux sulfatée, l'amphibole, l'euclase, etc. L'amphibole et l'euclase paraissent offrir les indices du centrage sur le plan $(1\bar{1}00)$; j'ai expliqué dans mon Mémoire sur les Systèmes de points que ce cas a lieu

lorsque le Réseau du plan $z = \frac{1}{2}$ se projette sur les milieux des paramètres formant les grands côtés des triangles principaux du Réseau du plan $z = 0$.

Système asymétrique.

Il est difficile, à cause du grand nombre des paramètres, d'obtenir une détermination bien certaine de la forme primitive.

On choisira les quatre faces non parallèles qu'indique soit le clivage, soit une plus grande fréquence relative, et on les considérera comme formant le tétraèdre principal de l'Assemblage formé par les molécules du cristal, ou du moins l'un de ses tétraèdres élémentaires les plus simples.

Des quatre faces qui forment ce tétraèdre, les trois qui embrassent entre elles l'angle solide le moins aigu, c'est-à-dire celui où la somme des angles dièdres est la plus grande, recevront les symboles (001), (010), (100), et la quatrième, le symbole (111). Alors on déterminera facilement les paramètres du système au moyen des six angles dièdres de ces faces. On aura, en effet,

$$\mu = \left(\widehat{(010), (001)}\right), \quad \nu = \left(\widehat{(001), (100)}\right), \quad \varpi = \left(\widehat{(010), (100)}\right),$$

et si l'on représente par μ_1, ν_1, ϖ_1 les angles

$$\left(\widehat{(111), (100)}\right), \quad \left(\widehat{(111), (010)}\right), \quad \left(\widehat{(111), (001)}\right),$$

il sera facile de passer des angles dièdres aux angles plans par les règles de la trigonométrie sphérique, et de déduire de ces derniers le rapport $a:b:d$.

Toutes les faces recevront des notations symboliques dépendantes du système d'axes que l'on aura adopté. On calculera les aires de leurs parallélogrammes générateurs par la formule (69), et, si l'accord entre la fréquence théorique et la fréquence naturelle des différentes faces n'était pas jugé satisfaisant, on effectuerait les changements d'axes ou de paramètres nécessaires pour rétablir le parallélisme que la théorie indique.

Je ferai remarquer de nouveau que ce parallélisme ne saurait être toujours rigoureusement exact. Il est évident que la densité réticulaire n'est pas le seul élément qui exerce de l'influence sur la formation d'une face, dans l'acte de la cristallisation, même sans qu'il soit nécessaire de recourir aux forces étrangères qui peuvent être mises en jeu. Le mode d'alternance des deux

Réseaux limitrophes qui bordent une strate peut agir de son côté ; car, si l'on projette ces Réseaux orthogonalement l'un sur l'autre, le Réseau fixe et le Réseau projeté pourront, dans certains cas, être presque confondus ; dans d'autres cas, les Sommets des parallélogrammes de l'un d'eux pourront être voisins des centres des parallélogrammes de l'autre. Ces différences, celles qui peuvent résulter des variations de forme du triangle principal, à égalité d'aire de ces triangles, et surtout celles qui sont dues à la forme du polyèdre moléculaire, à la direction de ses axes de principale attraction ou de principale répulsion, sont autant de causes qui doivent altérer, dans de certaines limites, la loi d'établissement des faces suivant la raison directe de la densité de leur tissu réticulaire.

Il pourra même arriver que ces actions favorisent toute une série de formes au détriment d'une autre série, ce qui altérera d'une manière encore plus grave les résultats déduits de notre hypothèse fondamentale. Malgré ces restrictions, je ne doute pas que cette hypothèse ne puisse rendre des services réels à la cristallographie et à la physique moléculaire. Mon but aura été atteint, si je parviens à engager les minéralogistes à soumettre un certain nombre d'espèces convenablement étudiées au calcul comparatif de la densité réticulaire de leurs faces, et de la tendance de ces mêmes faces à se produire dans l'acte de la cristallisation.

DEUXIÈME PARTIE (*).

DU CRISTAL CONSIDÉRÉ COMME UN ASSEMBLAGE DE MOLÉCULES POLYATOMIQUES.

---

§ I. — *De la symétrie des molécules des corps cristallisés.*

Dans les recherches qui précèdent, nous nous sommes exclusivement occupés de l'arrangement relatif des centres de gravité des molécules des corps cristallisés, arrangement qui constitue la *structure cristalline* proprement dite. Nous abordons maintenant une question plus délicate, celle de la *structure moléculaire,* et par là nous entendons la disposition géométrique des éléments qui constituent la molécule autour de son centre de gravité.

Les signes extérieurs capables de trahir au dehors la structure de la molécule, si elle est composée, ou du moins sa forme, si elle est simple, ne peuvent être que le résultat des forces attractives ou répulsives exercées par la molécule suivant différentes directions. Si ces forces allaient en s'irradiant sphériquement à partir du centre, si elles étaient les mêmes pour une distance donnée suivant toutes les directions, si en un mot tout était semblable autour de ce centre, la molécule agirait comme étant sphérique, ou, mieux encore, comme un simple point, pôle de forces; sa structure propre ne se traduirait par aucun phénomène sensible, et ne pourrait se déduire que de considérations théoriques, par exemple des lois atomistiques de la chimie.

Mais les choses ne se passent point ainsi; les forces émanées de la molécule ne sont pas les mêmes dans tous les sens; les réactions qui la sollicitent ne passent pas toujours par son centre de gravité, et les effets de ces inégalités permettent, lorsqu'on les étudie convenablement, de pénétrer dans son organisation intime.

Nous allons essayer de démontrer qu'une molécule possède divers centres ou pôles de forces. Ces pôles sont probablement les atomes constituants de

---

(*) Présentée à l'Académie des Sciences, le 6 août 1849. Le 24 février 1851, une Commission composée de MM. Dufrénoy, Regnault, Lamé et Cauchy rapporteur, a fait à l'Académie un Rapport favorable sur ce Mémoire.

la molécule; mais ce dernier point de vue, purement chimique, est jusqu'à un certain point étranger à la cristallographie, et je me bornerai à établir l'existence de la *polarité moléculaire*, indépendamment des conséquences que l'on pourrait ultérieurement en déduire.

En premier lieu, il résulte des travaux des géomètres, et notamment de MM. Poisson et Neumann, sur l'équilibre des corps cristallisés, que l'on ne peut expliquer la *rigidité* des corps solides, sans recourir à la polarité moléculaire. « Dans les corps solides, dit Poisson, la cause qui retient les « molécules sur les directions où elles sont plus ou moins resserrées ne peut « être que la partie de leur action qui dépend de leur forme et de leur « situation relatives.... Lorsque l'effet de cette force secondaire devient « insensible, le corps passe à l'état fluide »; et, ailleurs, « la parfaite mobi- « lité des molécules fluides résulte de ce qu'elles sont sphériques, ou assez « éloignées les unes des autres pour que leur forme n'ait aucune influence « sensible sur leur action mutuelle (*) ».

Telle est aussi l'opinion émise par Laplace, dans son *Exposition du Système du Monde*, 6e édit., tome II, page 350. « Il paraît que l'état solide « dépend de l'attraction des molécules combinées avec leur figure.... L'in- « fluence de la figure, sensible encore dans les liquides visqueux, est nulle « pour ceux qui jouissent d'une entière fluidité. »

En second lieu, la symétrie de la structure cristalline est une autre conséquence de l'influence qu'exerce la direction des forces moléculaires sur leur valeur absolue. Lorsqu'un corps passe lentement, et en cristallisant, de l'état fluide à l'état solide, chaque molécule vient à son tour se fixer sur la surface extérieure du cristal en voie de formation, au lieu qui convient à l'équilibre de son centre, et dans l'orientation convenable pour qu'aucun couple de rotation ne tende à la faire tourner autour de ce centre; l'adoption de tel ou tel système cristallin résulte de ces conditions d'équilibre, et ne paraît pouvoir s'expliquer, comme nous le dirons bientôt plus en détail, qu'en faisant intervenir la symétrie de la molécule: supposez sphérique cette dernière, et le choix du mode de cristallisation devient un effet dépourvu de cause suffisante qui puisse le produire.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXe cahier, pages 92 et 93.

Enfin, c'est la polarité moléculaire qui produit le phénomène connu, en cristallographie, sous le nom d'*hémiédrie*, comme M. Delafosse l'a indiqué le premier (*), et c'est ce que nous allons développer, en entrant dans les détails que nécessite l'importance du sujet.

Si l'on se reporte à la définition précédemment donnée (page 106) des *faces de même espèce* d'un cristal, on voit que, deux faces de même espèce étant en voie de formation autour du noyau placé au sein d'un milieu fluide convenablement constitué, tout sera semblable de part et d'autre pour chacune de ces faces, si les molécules sont de simples points matériels ou agissent comme de tels points. Le résultat nécessaire de cette manière de voir serait donc que des faces de même espèce devraient toujours coexister, sauf les cas d'avortement purement accidentel, et qu'ainsi toute forme cristalline devrait se produire sur les flancs du cristal avec le nombre complet de faces qui la caractérise.

C'est en effet ce qui a souvent lieu ; mais les choses ne se passent pas toujours de cette manière, et, dans des cas nombreux, une partie des faces disparaît, sans qu'on puisse expliquer ce fait par des causes accidentelles, par exemple au moyen d'une influence *à latere* exercée par le milieu ambiant. La disparition porte sur certaines faces placées d'une certaine manière, et ne se montre pas indistinctement sur toutes les formes cristallines. C'est ainsi que, dans le système terquaternaire, elle peut modifier la forme de l'octaèdre régulier, et le faire passer au tétraèdre régulier, tandis que rien de pareil n'a lieu pour le cube ou le dodécaèdre rhomboïdal.

Dans tous les cas de ce genre, la similitude absolue des faces d'une même forme paraît en défaut, ou du moins elle cesse d'entraîner la coexistence comme conséquence nécessaire.

Or il importe de remarquer que nous ne sommes arrivés à la loi de la coexistence qu'en considérant les molécules comme sphériques ; *cette hypothèse ne saurait donc être exacte*.

Les molécules des corps cristallisés seront donc pour nous dorénavant des polyèdres dont les sommets, distribués d'une manière quelconque autour du centre de gravité, seront les centres, ou pôles, des forces émanées de la molécule. Cette supposition a toute la généralité désirable ; car, si, par

(*) *Savants étrangers*, tome VIII, page 641.

exemple, l'on voulait faire de la molécule un solide fini et homogène, agissant par tous les points de sa surface ou de son volume, on pourrait toujours la supposer découpée en petits éléments agissant chacun comme si sa masse était concentrée en son centre de figure.

Toutes les molécules d'une même substance doivent être identiques et superposables. Dans la cristallisation, les lignes homologues de ces molécules deviennent parallèles, comme nous l'avons indiqué au commencement de la première partie de ce Mémoire; ainsi l'orientation moléculaire est la même d'un bout à l'autre du cristal. La polarité moléculaire et la variabilité des forces avec la direction sont des conséquences de la figure polyédrale de la molécule et de la loi suivant laquelle les forces émanées de chaque sommet varient suivant la distance. Lorsque les intervalles de deux molécules deviennent suffisamment grands, l'influence des dimensions transversales de chacune d'elles va en s'affaiblissant, et elles tendent de plus en plus à agir comme de simples points; mais les distances auxquelles elles viennent se placer en cristallisant sont nécessairement inférieures à la limite que nous venons d'indiquer. On voit ainsi pourquoi les actions mutuelles ne passent pas, en général, par les centres de gravité, et l'on comprend comment l'orientation parallèle des lignes homologues de deux molécules voisines, effet connexe à toute cristallisation, doit résulter des rotations que ces actions tendent à produire autour de leurs centres de gravité.

Après avoir établi l'existence des polyèdres moléculaires, nous allons prouver que ces polyèdres sont symétriques, et qu'ils possèdent, comme l'Assemblage cristallin sur les Sommets duquel ils viennent se fixer, des axes, centre ou plans de symétrie qui leur sont propres.

Je nomme centre de symétrie d'un polyèdre, un point central tel, qu'en le joignant à un sommet quelconque de ce polyèdre, et prolongeant la droite de jonction d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité de cette droite soit aussi un sommet du polyèdre. Il est visible que, dans un polyèdre limité, il ne peut y avoir qu'un seul centre de symétrie, et qu'il coïncide nécessairement avec le centre de gravité.

Les axes de symétrie seront des droites assujetties à passer par le centre de gravité, et telles qu'en faisant tourner le polyèdre autour d'elles d'un angle égal à une partie aliquote de 360 degrés, le lieu apparent des sommets

ne soit pas troublé par cette rotation. Ces axes peuvent être binaires, ternaires, quaternaires, etc., selon que la rotation qui restitue les lieux des sommets est égale à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,... de tour.

Enfin les plans de symétrie divisent le polyèdre en deux moitiés géométriquement symétriques, et doivent aussi contenir son centre de gravité.

Ceci posé, et pour fixer nos idées, considérons la molécule d'un cristal appartenant au système terquaternaire, dont la forme cristalline la plus générale consiste en quarante-huit faces de même espèce. Deux cas différents pourront se présenter : ou bien le polyèdre moléculaire possédera tous les éléments de symétrie de l'Assemblage correspondant, ou bien il n'en possédera qu'une partie.

Dans le premier cas, le polyèdre moléculaire aura trois axes quaternaires dirigés comme les axes quaternaires de l'Assemblage, quatre axes ternaires et six axes binaires coïncidant avec les axes de même nom de l'Assemblage; il possédera les neuf plans de symétrie qui le caractérisent, et un centre de symétrie en son centre de gravité.

Soient alors deux faces F, F′ provenant d'une même forme et directement semblables, et considérons la molécule M appartenant au plan réticulaire F, ainsi que la molécule M′ appartenant au plan réticulaire F′.

Transportons le plan F′ parallèlement à lui-même, de manière à amener M′ sur M; puis faisons tourner l'Assemblage mobile autour du centre de gravité commun de ces molécules coïncidentes, de sorte que le Réseau mobile de F′ vienne coïncider avec le Réseau fixe de F. Nous produirons cette superposition par une rotation angulaire de $\frac{p}{q}$ 360° autour d'un certain axe de symétrie L^q de l'Assemblage, q étant le numéro d'ordre de cet axe, et p un nombre entier plus petit que q. Or, par hypothèse, cet axe appartient aussi à la molécule M′; si donc cette molécule participe au mouvement de F′ et de l'Assemblage mobile, elle reprendra, après la rotation, la même position apparente, et recoïncidera avec M.

D'où l'on voit que, dans ce cas, tout est pareil entre les molécules du plan F d'une part et les molécules du plan F′ de l'autre, et qu'ainsi les deux faces F, F′ sont dans des conditions identiques de production comme faces limites du cristal.

Il en serait de même, si la face F′ était inversement semblable à la face F par rapport à un plan de symétrie P. Si le plan mené parallèlement à P par le centre de gravité de la molécule est un plan de symétrie du polyèdre moléculaire, F et F′ devront encore coexister.

Enfin, dans le cas où les faces F et F′ seraient inversement semblables par rapport à un centre de symétrie de l'Assemblage, c'est-à-dire, dans le cas où ces faces seraient parallèles, mais avec des côtés internes et externes tournés en sens inverses, nommons C (*fig.* 8) le centre de symétrie du système formé par ces deux faces, et p l'un des pôles de la molécule M dont le centre de gravité est en M; tout sera semblable entre la surface supérieure de F et la surface inférieure de F′, si p'_1 homologue de p par rapport à C est aussi un pôle de la molécule M′. Or, si l'on mène $M'p'$ égale et parallèle à Mp, p' doit être un pôle de M′ en vertu du parallélisme des molécules des cristaux; ainsi la coexistence des faces F, F′ dépend de celle des pôles p', p'_1, c'est-à-dire de cette condition que M′ soit un centre de symétrie pour la molécule M′. Si donc le polyèdre moléculaire possède un tel centre, la présence de F comme face limite de la moitié supérieure du cristal entraînera celle de sa parallèle F′ comme face limite dans sa moitié inférieure.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on se borne à considérer les conditions de coexistence des vingt-quatre faces de la demi-forme directe (*voyez* les définitions de la page 110) dans le système terquaternaire, on reconnaîtra la nécessité de la présence des treize axes de symétrie du système dans le polyèdre moléculaire, et que la demi-forme inverse accompagnera la demi-forme directe, si le polyèdre moléculaire possède, en outre, un centre de symétrie.

Examinons maintenant le second cas, et supposons que l'axe L^q qui sert à effectuer la coïncidence de F′ avec F n'existe point, comme axe de symétrie, dans le polyèdre moléculaire. Lorsqu'une rotation égale à $\frac{p}{q}$ 360° aura superposé les deux Réseaux des faces F et F′, et que les centres de gravité de M et de M′ coïncideront, le polyèdre M′ aura cessé de coïncider avec M, puisque L^q n'est plus, par hypothèse, un axe de symétrie de ce polyèdre. Donc, si l'on considère F et F′ comme étant des faces qui limitent au même moment le cristal en voie de formation au sein de la masse fluide qui le pro-

duit, la situation de tous les pôles ou centres de forces au-dessus et au-dessous du plan F ne sera pas rigoureusement la même que celle des pôles homologues au-dessus et au-dessous du plan F'; les résultantes qui sollicitent une molécule encore libre et flottante à petite distance du plan F ne seront pas les mêmes que celles qui sollicitent une autre molécule semblablement placée par rapport au plan F'; ainsi la cristallisation pourra se comporter différemment sur les deux surfaces F, F' qui séparent le cristal de son milieu générateur, et, par conséquent, une partie des faces de la forme pourra ne pas se produire.

Si le polyèdre, possédant d'ailleurs les treize axes du système terquaternaire, était dépourvu de centre de symétrie, les vingt-quatre faces de la demi-forme inverse pourraient disparaître, et la demi-forme directe se produirait seule.

On a désigné sous le nom de *cristaux holoédriques* ceux dont les formes obliques sont toujours complètes, possédant quarante-huit faces dans le système terquaternaire, vingt-quatre dans le système sénaire, seize dans le quaternaire, et ainsi de suite. D'où l'on voit, en généralisant, que :

Dans tous les cristaux holoédriques, le polyèdre moléculaire possède les mêmes axes et plans de symétrie que l'Assemblage, et un centre de symétrie en son centre de figure (*).

On a désigné sous le nom de *cristaux hémiédriques, tétartoédriques,* ceux pour lesquels le nombre des faces de la forme oblique se réduit à la moitié ou au quart de sa valeur : plus généralement encore, nous désignerons ces cristaux sous le nom de *cristaux mériédriques*. L'on voit donc que :

Pour tous les cristaux mériédriques, une partie des axes, centre ou plans de symétrie de l'Assemblage ne se rencontre pas dans leur polyèdre moléculaire.

Par une observation convenable de ces cristaux, on peut toujours reconnaître les axes et plans qui font ainsi défaut, et décomposer les éléments de la symétrie de l'Assemblage en deux groupes, dont l'un, commun à la fois à l'Assemblage et à la molécule, rend compte de la présence simultanée d'un

(*) Les conditions enoncees dans ce theorème sont surabondantes, et de ces trois sortes d'élements, les axes, les plans et le centre, deux suffisent pour entrainer la presence de la troisième.

certain nombre de faces de la même forme, et dont l'autre, venant à manquer dans la molécule, explique la suppression des faces disparues.

Toutes les fois que la superposition des Réseaux de deux faces de même espèce entraînera la coïncidence complète des polyèdres moléculaires, ces faces seront dites, non-seulement faces de même espèce, mais de plus *identiques*, conformément aux définitions de la page 106; dans le cas contraire, les faces seront de même espèce, mais non identiques.

D'après cela, la loi dite « loi de symétrie » qui règle le mode de distribution des faces d'un cristal devra s'énoncer de la manière suivante :

Toutes les faces appartenant à une même forme cristalline, et de plus identiques, doivent coexister.

Nous allons maintenant considérer un polyèdre moléculaire dont nous ferons varier le degré de symétrie. Dans le principe, ce polyèdre sera censé posséder la symétrie complète qui caractérise son Assemblage; puis, par la suppression de certains axes ou plans de symétrie, on abaissera graduellement celle-ci, et l'on fera naître des cristaux mériédriques, dans lesquels les groupes de faces identiques deviendront de moins en moins complexes, sans toutefois que les situations relatives soient altérées. Il semble, au premier abord, qu'il n'y a pas dans la nature de limite à cette diminution progressive de la symétrie de la molécule pour un système cristallin donné, et qu'on doit en rencontrer tous les cas possibles dans les différentes espèces minérales. Mais l'observation prouve qu'il n'en est pas ainsi; les polyèdres moléculaires pauvres en éléments de symétrie ne s'associent pas en Assemblages cristallins dont la symétrie soit très-élevée, et l'on peut dire, en thèse générale et malgré un très-petit nombre d'exceptions, que l'on ne voit pas les formes et combinaisons de formes des systèmes cristallins les moins symétriques présenter les angles et inclinaisons caractéristiques des systèmes les plus symétriques.

D'où l'on déduit qu'il existe une limite à l'appauvrissement de la symétrie d'un polyèdre moléculaire qui cristallise dans un système donné, et que, si on lui enlève un nombre suffisant de ses termes, la symétrie de sa cristallisation s'abaissera, elle aussi, à un moindre degré; ce que l'on peut exprimer en disant que :

Les polyèdres à symétrie complexe cristallisent dans les systèmes à symétrie complexe, et ceux à symétrie simple, dans les systèmes à symétrie simple.

Une telle correspondance ne saurait être l'effet du hasard, et puisqu'à une structure moléculaire donnée correspond une structure cristalline qui s'y rapporte, il paraîtra bien probable que la symétrie moléculaire détermine celle de l'Assemblage cristallin.

On peut arriver au même résultat par des considérations théoriques, et en s'appuyant sur les conditions de l'équilibre des Assemblages cristallins. Nous prendrons pour exemple une agrégation de molécules holoédriques, à cristallisation commençante, et nous allons essayer de démontrer que la symétrie de la molécule tend à se transmettre à l'Assemblage qui va se former.

Considérons deux molécules voisines M, M', placées, l'une par rapport à l'autre, à une distance r suffisamment petite pour que l'influence de leurs dimensions transversales se fasse sentir de l'une à l'autre, et supposons qu'il existe un axe d'ordre q dans leurs polyèdres. Si ces deux molécules se placent bout à bout dans le prolongement de leurs axes L^q, et s'orientent de la même manière par rapport à l'espace extérieur, la résultante qui sollicite chacun des deux centres M, M' sera nécessairement dirigée suivant leur ligne de jonction; car toute action oblique se répéterait $q - 1$ fois autour de MM' qui est un axe de symétrie d'ordre q pour le groupe de ces deux molécules, et la résultante de ces q forces serait dirigée suivant MM'. Il en sera de même dans le cas d'une file rectiligne et illimitée de molécules M, M', M'',... semblablement orientées, si cette file est un axe de symétrie de ces molécules, et l'on conçoit qu'en faisant varier le commun intervalle r qui sépare ces molécules entre elles, on puisse trouver une disposition telle que la file se maintienne en équilibre. La stabilité de cet équilibre résultera de ce que, si l'une des molécules s'écarte de l'axe de la file, il se développera des composantes latérales tendant à l'y ramener.

De même que nous avons, en partant de la molécule M, et suivant la direction de l'axe L^q, ordonné une première Rangée de molécules, nous pourrons, suivant les directions d'autres axes, former d'autres séries

$$M \mu \mu' \mu'', \quad M \mu_1 \mu'_1 \mu''_1, \text{ etc.}$$

Les molécules $\mu, \mu', \mu'', \ldots, \mu_1, \mu'_1, \mu''_1, \ldots$ deviendront à leur tour les têtes de

colonne d'autant de Rangées parallèles à MM'M''.... Il est clair que ces nouvelles Rangées tendront à se disposer symétriquement autour de MM', attendu que les forces contenues dans un plan mobile passant par la droite MM' et tournant autour d'elle redeviennent les mêmes, chaque fois que l'angle de rotation de ce plan augmente de $\frac{360^\circ}{q}$, ce qui tend à faire de MM' un axe de symétrie pour tout le système : ainsi la présence de ces nouvelles Rangées ne pourra exercer sur le centre de gravité de M aucune action oblique par rapport à MM', puisque toute résultante de ce genre se répéterait $q - 1$ fois autour de cet axe, et donnerait lieu à une composante parallèle à sa direction.

On conçoit ainsi la possibilité de la stabilité d'un tel système, pour des espaces intermoléculaires convenablement choisis, et l'on voit qu'il y a plus de chances de rencontrer l'équilibre dans une telle disposition que dans toute autre, par suite de la réduction à zéro des composantes normales à l'axe considéré.

D'où il résulte, comme nous l'avions annoncé, qu'un axe de symétrie du polyèdre moléculaire tend à se transmettre, comme axe de symétrie de même ordre et semblablement placé, à l'Assemblage suivant lequel la cristallisation s'effectue.

Il en est de même pour les plans de symétrie de la molécule. Car, soit MP (*fig.* 9) un plan de symétrie supposé horizontal, et coupé suivant la droite MP par le plan vertical de la figure. Il est clair que les molécules très-voisines de ce plan tendent à y prendre leur position d'équilibre après avoir adopté une orientation commune; car alors elles ne peuvent produire les unes sur les autres aucune action normale à ce plan. De plus, si l'on considère une file MM'M'''... déjà en état d'équilibre stable, sa symétrique MM''M^{IV}..., si elle existe, se trouvera pareillement en équilibre; d'où l'on voit que, si une molécule encore flottante est très-voisine du lieu M^{IV} qu'occuperait la symétrique de M''' par rapport au plan MP, elle devra tendre à venir prendre en M^{IV} sa position d'équilibre définitive; et telle est la cause de la tendance du plan MP à devenir un plan de symétrie pour l'Assemblage.

On conçoit, d'après ce qui précède, comment la structure du polyèdre moléculaire réagit sur celle du cristal et détermine le choix du système. Si l'on rejetait cette explication, et si l'on voulait continuer à considérer les molécules comme des points ou des sphères, un tel choix, nous l'avons déjà

dit à la page 195, nous paraîtrait comme étant un effet sans cause : ajoutons quelques développements à ce sujet.

On sait que tout Assemblage cristallin est caractérisé par les dimensions de son parallélipipède générateur, savoir, par trois paramètres linéaires a, b, d représentant les arêtes, et par trois paramètres angulaires α, β, δ représentant les angles plans. Cependant, dans la supposition des molécules sphériques, une combinaison quelconque de paramètres suffirait à l'équilibre des molécules centrales, puisque chacune d'elles est un centre de symétrie pour le système des molécules qui l'environnent, dans la sphère très-limitée des actions moléculaires. Par suite de cette indifférence de l'équilibre interne, la combinaison adoptée dépendrait uniquement des conditions d'équilibre des molécules de la surface, et serait ainsi sous l'influence des actions extérieures, de manière, par exemple, à produire l'échange des paramètres entre eux, lorsqu'on échangerait entre elles les forces extérieures parallèles à ces paramètres, ce qui mène à des conséquences évidemment contredites par l'observation.

En outre, et sauf le cas très-rare des cristaux du système asymétrique, certaines combinaisons d'égalité ou de perpendicularité des arêtes sont les seules que la nature réalise. Par exemple, dans le cas où l'on a $a = b = d$, on ne rencontre que les deux combinaisons suivantes :

1°. $\alpha = 90°, \beta = 90°, \delta = 90°$, qui correspond au cube;

2°. $\alpha = \beta = \delta$, qui correspond au rhomboèdre.

Ce choix que fait la nature, et la préférence qu'elle accorde à certaines formes de parallélipipèdes générateurs, resteraient donc inexpliqués et troubleraient l'enseignement rationnel de la cristallographie, tant que l'on s'abstiendrait d'y reconnaître l'influence de la symétrie moléculaire.

En nous résumant, nous admettrons que le polyèdre moléculaire est symétrique, et que les éléments de sa symétrie, tendant à passer à l'Assemblage correspondant, en déterminent la structure.

A la vérité, on peut objecter que la difficulté d'expliquer l'état symétrique des Assemblages cristallins est simplement reculée, et qu'il reste à faire voir pourquoi le polyèdre moléculaire est symétrique. La théorie atomique fournit une réponse toute prête à cette dernière demande, en nous montrant chaque molécule d'un corps comme composée d'un nombre fini d'atomes de diffé-

rentes espèces. Déjà, par des considérations d'un tout autre ordre, Ampère était arrivé, en 1814, à ce résultat, que le polyèdre moléculaire devait être formé d'atomes disposés symétriquement autour de son centre de gravité; l'équilibre interne de la molécule est facile à baser sur cette donnée.

Ici se présente une autre objection relative à la cristallisation des corps simples. Lorsque le carbone, le soufre, le bismuth cristallisent, devons-nous admettre que leur molécule est polyédrale? Je n'hésite pas à répondre par l'affirmative, et je pense qu'avant de cristalliser, les atomes de ces corps se trouvent déjà groupés de manière à former un polyèdre de forme déterminée.

Après avoir établi la loi de la symétrie du polyèdre moléculaire, nous avons maintenant : 1° à déduire de la symétrie donnée d'un tel polyèdre le système dans lequel il doit cristalliser; 2° à signaler les divers cas de mériédrie (hémiédrie, tétartoédrie) que pourra produire l'état incomplet de la symétrie de ce polyèdre; 3° à comparer les résultats théoriques ainsi obtenus avec les divers exemples de mériédrie observés par les minéralogistes.

Dans la dernière partie de ces Études, je rattacherai à la même théorie les phénomènes d'hémitropie et de pénétration de deux cristaux.

§ II. — *Du système cristallin suivant lequel doivent se grouper des molécules de symétrie connue.*

J'ai donné, dans le tome XIV du *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* publié par M. Liouville, une classification complète des polyèdres au point de vue de leur symétrie. Elle se trouve résumée dans le Tableau n° VII que l'on trouvera à la fin de ce Mémoire.

Les symboles Λ, L, L′, C, Π, P, P′ qui y figurent sont ceux déjà employés dans mon travail sur les polyèdres de forme symétrique, ainsi que dans mon Mémoire sur les Systèmes de points, aux pages 93 et suivantes. Les lettres P, P′ dépourvues d'indice exponentiel désignent des plans de symétrie qui ne sont normaux à aucun des axes du polyèdre; les signes o L, o L^2, o C, o P indiquent que le polyèdre est privé d'axes, ou d'axes binaires, ou de centre de symétrie, ou de plans de symétrie.

Un axe est dit *principal* lorsque les autres axes lui sont normaux, et que de plus tout plan de symétrie lui est normal ou le renferme.

Dans les polyèdres des 4e, 5e,... classes, jusqu'à la 16e inclusivement, on peut donner à q toutes les valeurs entières possibles, depuis $q=1$ jusqu'à $q=\infty$. Le numéro d'ordre de l'axe principal désigne alors l'ordre de la classe. Les 4e, 5e, 6e, 7e, 8e et 9e classes sont toutes d'ordre pair; les 10e, 11e, 12e, 13e, 14e, 15e et 16e sont, au contraire, toutes d'ordre impair.

Les polyèdres sphéroédriques sont ceux qui possèdent plusieurs axes dont aucun n'est un axe principal; ils se divisent en deux groupes, les quaterternaires et les décemternaires, selon que le nombre de leurs axes ternaires est égal à 4 ou à 10.

Dans les polyèdres des 17e, 18e et 19e classes, les axes $4L^3$ sont parallèles aux quatre diagonales d'un cube, les axes $3L^2$ aux arêtes de ce cube, les plans $6P$ aux plans qui joignent deux à deux les milieux des arêtes opposées.

Dans les polyèdres des 20e et 21e classes, les axes $4L^3$ sont parallèles aux quatre diagonales d'un cube, les axes $3L^4$ aux arêtes de ce cube, les axes $6L^2$ aux lignes qui joignent deux à deux les milieux des arêtes opposées.

Dans les polyèdres des 22e et 23e classes, les axes $6L^5$ sont parallèles aux lignes qui joignent deux à deux les centres des faces opposées d'un dodécaèdre régulier, les axes $10L^3$ aux dix grandes diagonales de ce polyèdre, et les axes $15L^2$ aux lignes qui joignent deux à deux les milieux des arêtes opposées.

Pour de plus amples détails, on peut consulter mon Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique (*).

Nous avons vu (page 203) que, lorsqu'une substance dont les polyèdres moléculaires sont doués d'une certaine symétrie vient à cristalliser, les axes et plans de la symétrie moléculaire tendent à passer dans l'Assemblage cristallin, en conservant leurs situations relatives. En conséquence, et pour déterminer la nature du système cristallographique, j'admettrai la règle suivante :

Parmi les sept systèmes cristallins, les molécules d'une substance donnée qui vient à cristalliser adopteront celui dont la symétrie offre le plus grand nombre d'éléments communs avec la symétrie propre à leur polyèdre moléculaire.

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XIV, page 141.

Croire que cette règle ne souffre jamais d'exception serait peut-être aller trop loin; mais elle doit évidemment s'appliquer à l'immense majorité des cas qui peuvent se présenter, et cela suffit pour l'usage que nous avons à en faire.

Avant de chercher à l'appliquer, je ferai remarquer que la considération du centre de symétrie est étrangère à la question actuelle, puisque ce centre figure également dans les symboles de symétrie de nos sept systèmes cristallins, et qu'il est l'une des conditions essentielles de tout Assemblage. Il nous reste donc seulement à tenir compte des axes et des plans de symétrie.

Les axes de symétrie d'un Assemblage sont nécessairement binaires, ternaires, quaternaires ou sénaires; ainsi les autres axes que pourrait posséder le polyèdre peuvent être regardés comme des lignes asymétriques, ou ne pouvant influer sur la symétrie de l'Assemblage, à moins cependant que le numéro d'ordre de leur symétrie ne soit un multiple des nombres 2, 3, 4 ou 6, auquel cas l'axe de symétrie du polyèdre, transporté dans l'Assemblage, y jouera le rôle d'un axe de l'un de ces ordres.

Notations et définitions. — Je désignerai par S_c l'ensemble des éléments de symétrie communs à la fois au polyèdre moléculaire et à son Assemblage cristallin; par S_p l'ensemble des éléments de symétrie appartenant en propre au polyèdre, et par S_a l'ensemble des éléments de symétrie de l'Assemblage qui ne se retrouvent pas dans le polyèdre. De la sorte, la symétrie complète du polyèdre pourra être représentée par le symbole

$$[S_c, S_p],$$

et la symétrie complète de l'Assemblage sera figurée par

$$[S_c, S_a].$$

Je désignerai sous le nom de *polyèdre équivalent au polyèdre donné,* celui dont la symétrie complète serait $[S_c]$; d'où l'on voit que le polyèdre équivalent n'est autre chose que le polyèdre primitif débarrassé de toutes ses conditions superflues de symétrie, c'est-à-dire de tous les éléments qui ne sont pas de nature à se transmettre à l'Assemblage dans lequel ils doivent cristalliser.

Il pourra arriver que plusieurs de nos sept systèmes cristallins possèdent à la

fois la même partie S_c de la symétrie totale du polyèdre; dans ce cas, la règle de la page 206 ne suffit plus pour déterminer le système cristallin. Je prendrai comme exemple le polyèdre moléculaire [A^2, 2 L^2, 0 C, 2 P] caractérisé par un axe principal binaire A^2, deux axes binaires de même espèce L^2 perpendiculaires l'un sur l'autre et sur l'axe principal, deux plans de symétrie passant par l'axe A^2 et inclinés de 45 degrés sur les axes L^2. La symétrie commune à ce polyèdre et au système quaternaire est [A^2, 2L^2, 2P]; la symétrie commune à ce polyèdre et au système terquaternaire est aussi [A^2, 2 L^2, 2 P]. Comment choisir entre ces deux systèmes?

Dans ce cas, et dans tous les autres cas pareils, je remarque que nos deux systèmes cristallins diffèrent par le nombre des paramètres qu'ils laissent indéterminés dans le parallélipipède générateur. Sur les six quantités a, $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{a}$, α, β, δ (*voyez* page 204), le nombre des quantités déterminées est de

5 pour le système terquaternaire,
4 pour les systèmes sénaire, quaternaire et ternaire,
3 pour le système terbinaire,
2 pour le système binaire,
0 pour le système asymétrique.

Or, supposons que deux systèmes cristallins possèdent également la symétrie S_c du polyèdre moléculaire, mais que le nombre des paramètres déterminés soit égal à j pour l'un de ces systèmes et à $j' > j$ pour l'autre. Puisqu'il existe des Assemblages à j paramètres déterminés possédant la symétrie S_c du polyèdre, quelle que soit la valeur des $6 - j$ autres paramètres, il est clair qu'il n'existe aucune raison suffisante pour pouvoir assigner d'avance la valeur de $j' - j$ autres paramètres, et qu'il faut laisser aux forces moléculaires développées dans la cristallisation le soin d'en fixer la véritable valeur.

D'où l'on déduit cette deuxième règle que :

Dans le cas où plusieurs systèmes cristallins présenteraient les mêmes éléments de symétrie communs à leurs Assemblages et au polyèdre moléculaire donné, la cristallisation se fera suivant le système de moindre symétrie, c'est-à-dire suivant le système qui laisse le plus grand nombre de termes

indéterminés parmi les six éléments constitutifs de son parallélipipède générateur.

L'application de cette deuxième règle lève l'indécision que nous avions signalée, excepté pour quelques polyèdres, à axe principal ternaire, qui paraissent pouvoir cristalliser aussi bien dans le système sénaire que dans le système ternaire, et sur lesquels nous aurons plus tard l'occasion de revenir.

On peut énoncer simplement les deux règles que nous venons d'établir, en prescrivant de choisir le système cristallin *de telle sorte,* 1° *que* S_c *soit le plus grand possible,* 2° *que* S_a *soit ensuite rendu le plus petit possible.*

Ces règles vont nous servir de guide dans l'examen successif des vingt-trois classes de polyèdres que présente le Tableau n° VII.

Polyèdres des 1*re* *et* 2*e* *classes.* — Ces polyèdres doivent cristalliser dans le système asymétrique. On voit bien d'ailleurs qu'il n'existe aucune raison suffisante pour que des axes ou des plans de symétrie se produisent dans leur Assemblage.

Polyèdres de la 3*e* *classe.* — Ces polyèdres possèdent un plan de symétrie qui devra se transmettre à l'Assemblage. Celui-ci possédera de plus un centre de symétrie et un axe binaire normal à ce plan, et appartiendra au système binaire. Les équations suivantes donneront les symétries comparées du polyèdre et de l'Assemblage ; on aura,

$$\text{pour le polyèdre,}\quad S_c = [P],\quad S_p = 0,$$
$$\text{pour l'Assemblage,}\quad S_c = [\Pi],\quad S_a = [A^2, C].$$

Polyèdres des 4*e*, 5*e*, 6*e*, 7*e*, 8*e* *et* 9*e* *classes.* — Tous ces polyèdres possèdent un axe principal d'ordre $2q$. Il convient d'examiner séparément les trois cas,

$$2q = 12j \pm 2,$$
$$2q = 12j \pm 4,$$
$$2q = 6j,$$

j étant un nombre entier quelconque, pouvant être égal à zéro.

Premier cas, où $2q = 12j \pm 2$.

Le polyèdre $[A^{12j\pm2}, 0L^2, 0C, 0P]$ possède un axe qui se comportera comme un axe binaire ; il cristallisera donc dans le système binaire $[A^2, C, \Pi]$,

et l'on aura

$$S_c = [A^2].$$

Le polyèdre $[A^{12j\pm 2}, oL^2, C, \Pi]$ est dans le même cas que le précédent; il cristallise dans le système binaire : la commune symétrie est $[A^2, C, \Pi]$. Le cristal formé sera holoédrique, puisque le polyèdre moléculaire possède tous les éléments de symétrie de son Assemblage.

Dans le polyèdre $[A^{12j\pm 2}, (6j \pm 1) L^2, (6j \pm 1) L'^2, oC, oP]$, à chaque axe binaire L^2 correspond un axe binaire L'^2 d'une autre espèce, et qui lui est perpendiculaire (*); la cristallisation se fera dans le système terbinaire : on aura donc

$$S_c = [A^2, L^2, L'^2].$$

Dans le polyèdre $[A^{12j\pm 2}, oL^2, oC, (6j \pm 1) P, (6j \pm 1) P']$, à chaque plan de symétrie P passant par l'axe principal, correspond un autre plan de symétrie P' qui lui est normal (**); la cristallisation se fera dans le système terbinaire, et l'on aura

$$S_c = [A^2, P, P'].$$

Dans le polyèdre

$$[A^{12j\pm 2}, (6j \pm 1) L^2, (6j \pm 1) L'^2, C, \Pi, (6j \pm 1) P^2, (6j \pm 1) P'^2],$$

à chaque axe L^2 correspondent un axe L'^2 qui lui est normal, et des plans P^2, P'^2 normaux à ces axes. Ainsi le polyèdre contient tous les éléments de la symétrie terbinaire $[A^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2]$; le cristal sera holoédrique.

Enfin le polyèdre $[A^{12j\pm 2}, (12j \pm 2) L^2, oC, (12j \pm 2) P]$ offre, pour chaque axe L^2, un axe de même espèce qui lui est normal, et deux plans de symétrie P qui forment avec lui des angles de 45 degrés. Car, si l'on nomme $(\widehat{L^2, L^2})$ l'angle de deux axes binaires, et $(\widehat{L^2, P})$ l'angle d'un axe binaire et d'un plan de symétrie, on a

$$(\widehat{L^2, L^2}) = (0, 1, 2 \ldots, 12j \pm 2 - 1) \frac{180^\circ}{12j \pm 2},$$

$$(\widehat{L^2, P}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots, 12j \pm 2 - \frac{1}{2}\right) \frac{180^\circ}{12j \pm 2}.$$

(*) *Journal de Mathématiques*, tome XIV, page 156.

(**) *Ibid.*, tome XIV, page 156.

En choisissant pour facteur dans le second membre de la première formule le nombre $6j \pm 1$, on trouve $(\widehat{L^2, L^2}) = 90°$.

En choisissant pour facteur dans le second membre de la deuxième formule le nombre $3j \pm \frac{1}{2}$, on trouve $(\widehat{L^2, P}) = 45°$.

D'où l'on voit qu'entre notre polyèdre et les Assemblages quaternaires nous avons la portion de symétrie commune

$$S_c = [A^2, 2L^2, 2P].$$

La portion de symétrie commune à notre polyèdre et au système terbinaire serait seulement $[A^2, L^2, L^2]$, symétrie moins étendue que la précédente. La cristallisation se fera donc suivant le système quaternaire.

Deuxième cas, où $2q = 12j \pm 4$.

Dans ce cas, la cristallisation s'effectue suivant le système quaternaire.

Lorsque les termes $(6j \pm 2)L^2$, $(6j \pm 2)L'^2$ figurent dans le symbole de la symétrie du polyèdre, on voit facilement qu'il existe deux axes L^2 perpendiculaires entre eux, et deux axes L'^2 qui sont les bissecteurs des angles droits formés par les axes précédents; alors $2L^2$, $2L'^2$ sont des éléments de symétrie communs au polyèdre et à son Assemblage.

Lorsque le polyèdre contient les plans de symétrie $(6j \pm 2)P$, $(6j \pm 2)P'$, on y découvrira de même le système $2P$, $2P'$ consistant en deux plans normaux de même espèce, passant par l'axe quaternaire, et croisés sous l'inclinaison de 45 degrés avec deux plans normaux d'une autre espèce, système qui appartient à la symétrie des Assemblages quaternaires.

Lorsque le polyèdre aura pour symbole

$$[A^{12j \pm 4}, (12j \pm 4)L^2, 0C, (12j \pm 4)P],$$

il appartiendra encore au système quaternaire; mais la disposition relative des axes L^2 et des plans P ne permettra pas que ces deux éléments entrent en même temps dans l'expression de la symétrie commune au polyèdre et à l'Assemblage. On aura donc, ou bien

$$S_c = [A^2, 2L^2, 2L^2],$$

c'est-à-dire l'axe quaternaire avec quatre axes binaires se croisant à son pied

sous des angles de 45 degrés, ou bien

$$S_c = [A^4, 2P, 2P],$$

c'est-à-dire l'axe quaternaire avec quatre plans de symétrie passant par cet axe, et faisant entre eux des angles de 45 degrés.

Les axes $2L^2$, $2L^2$ sont de même espèce dans le polyèdre, mais d'espèce différente dans l'Assemblage. Il en est de même pour les plans $2P$, $2P$.

On a ainsi deux solutions distinctes, paraissant *à priori* également possibles, entre lesquelles la substance donnée optera, suivant les autres conditions de son équilibre.

Troisième cas, où $2q = 6j$.

La cristallisation s'effectuera suivant le système sénaire. La discussion de ce cas serait pareille à celle du cas précédent. Les éléments de symétrie $3jL^2$, $3jL'^2$ se réduisent à $3L^2$, $3L'^2$ dans l'Assemblage sénaire; de même $3jP$, $3jP'$ se réduisent à $3P$, $3P'$.

Le polyèdre $[A^{6j}, 6jL^2, 0C, 6jP]$ est par rapport au système sénaire ce qu'était $[A^{12j \pm 4}, (12j \pm 4)L^2, 0C, (12j \pm 4)P]$ par rapport au système quaternaire : il conduit aux deux solutions

$$S_c = [A^6, 3L^2, 3L^2],$$
$$S_c = [A^6, 3P, 3P].$$

Dans le cas où j est pair, l'ordre de symétrie de l'axe principal est à la fois divisible par les nombres 3, 4 et 6; mais comme le système sénaire offre une commune symétrie plus élevée que celle qu'offriraient les systèmes quaternaire ou ternaire, on devra, d'après la règle de la page 206, se décider pour le système sénaire.

Polyèdres des 10e, 11e, 12e, 13e, 14e, 15e *et* 16e *classes.* — Tous ces polyèdres possèdent un axe principal d'ordre $2q+1$. Nous examinerons séparément les trois cas

$$2q + 1 = 6j \pm 1,$$
$$2q + 1 = 3,$$
$$2q + 1 = 6j + 3,$$

j étant un nombre entier quelconque, plus grand que zéro.

Premier cas, où $2q+1 = 6j \pm 1$.

L'axe $A^{6j\pm1}$ ne pouvant se transmettre à l'Assemblage, il est inutile d'y avoir égard.

Le polyèdre $[A^{6j\pm1}, oL^2, oC, oP]$ se comportera donc comme un polyèdre de la 1re classe.

Le polyèdre $[A^{6j\pm1}, oL^2, C, oP]$ se comportera comme un polyèdre de la 2e classe.

Le polyèdre $[A^{6j\pm1}, (6j\pm1)L^2, oC, oP]$ ne pourra transmettre à l'Assemblage qu'un seul de ses axes binaires; car, si deux axes binaires, faisant entre eux l'angle $p\frac{360°}{6j\pm1}$, p étant un nombre entier, venaient à passer dans l'Assemblage, la droite normale au plan de ces deux axes serait un axe commun dont le numéro d'ordre (*) serait $6j\pm1$ ou l'un des sous-multiples de $6j\pm1$, et par conséquent premier avec les nombres 2, 3, 4, 6, ce qui est impossible.

Le polyèdre cristallisera donc dans le système binaire.

De même le polyèdre $[A^{6j\pm1}, oL^2, oC, (6j\pm1)P]$ ne pourra transmettre à son Assemblage que l'un de ses plans de symétrie et se comportera comme un polyèdre de la 3e classe.

Il en sera encore de même pour le polyèdre $[A^{6j\pm1}, oL^2, oC, \Pi]$, qui transmettra à l'Assemblage le plan de symétrie Π.

Dans le polyèdre $[A^{6j\pm1}, (6j\pm1)L^2, C, (6j\pm1)P^2]$, les éléments de symétrie communs avec le système binaire seront $[L^2, C, P^2]$, et deviendront $[A^2, C, \Pi]$ dans l'Assemblage. La cristallisation sera binaire et holoédrique.

Le polyèdre $[A^{6j\pm1}, (6j\pm1)L^2, oC, \Pi, (6j\pm1)P]$ pourra transmettre à l'Assemblage qui en dérive l'un de ses axes binaires L^2, le plan de symétrie P qui passe par cet axe L^2, et le plan Π normal à ce plan P et passant aussi par L^2. On aura donc,

$$\text{dans le polyèdre,}\quad S_c = [L^2, \Pi, P],$$

$$\text{dans l'Assemblage,}\quad S_c = [A^2, P, P'],$$

attendu que L^2 devient dans l'Assemblage l'axe principal du système; la

(*) En vertu des théorèmes XXIV et XXXII de mon Mémoire sur les polyèdres de figure symétrique (*Journal de Mathématiques*, tome XIV).

cristallisation se fera dans le système terbinaire dont le symbole est $[A^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2]$.

Deuxième cas, où $2q + 1 = 3$.

Les polyèdres
$$[A^3, 0L^2, 0C, 0P],$$
$$[A^3, 0L^2, C, 0P],$$
$$[A^3, 3L^2, 0C, 0P],$$
$$[A^3, 0L^2, 0C, 3P],$$
$$[A^3, 3L^2, C, 3P^2],$$

ont leurs éléments de symétrie compris dans l'expression générale de la symétrie des Assemblages ternaires, et aussi dans l'expression générale de la symétrie des Assemblages sénaires. Or les deux systèmes ternaire et sénaire ont dans leurs parallélipipèdes générateurs le même nombre de paramètres indéterminés, de sorte que la règle de la page 208 ne peut suffire à lever cette indétermination. La substance cristallisante choisira entre ces deux systèmes, d'après les autres conditions de l'équilibre.

Du reste, l'indétermination actuelle qui se présente dans la cristallisation d'un polyèdre tel que $[A^3, 0L^2, 0C, 0P]$, lorsque l'on veut savoir si ce polyèdre aura pour noyau un rhomboèdre ou un prisme hexagonal régulier, est tout à fait du même ordre, au point de vue mécanique, que celle qui se présente pour le polyèdre $[A^4, 0L^2, 0C, 0P]$, lorsqu'on veut décider si ce polyèdre cristallisera dans le mode quaternaire octaédral, avec un octaèdre à base carrée pour noyau, ou dans le mode quaternaire hexaédral avec un prisme à base carrée pour parallélipipède générateur.

La même indécision ne subsiste plus pour les polyèdres ternaires des 12e et 16e classes. Car les polyèdres
$$[A^3, 0L^2, 0C, \Pi],$$
$$[A^3, 3L^2, 0C, \Pi, 3P],$$

contiennent le plan de symétrie Π, lequel appartient aux Assemblages sénaires, mais non aux ternaires. La cristallisation se fera donc suivant le

système sénaire, et l'on aura

pour le premier de ces polyèdres, $S_c = [A^2, \Pi]$,
pour le deuxième, $S_c = [A^2, 3L^2, \Pi, 3P]$.

Troisième cas, où $2q + 1 = 6j + 3$.

Ce cas ne diffère réellement pas du cas précédent, dont il n'a été séparé que pour en faciliter la discussion. L'axe principal A^{6j+3} se comportera comme s'il était simplement ternaire.

En outre, il est facile de s'assurer que, sur les $(6j + 3)$ axes binaires du symbole $(6j + 3) L^2$, il en existera toujours trois inclinés à 60 degrés l'un sur l'autre, et par conséquent placés dans les mêmes conditions de situation relative que les trois axes binaires $3L^2$ du polyèdre à axe ternaire et de même classe. Il en sera de même pour les plans de symétrie $(6j + 3) P$.

Tous ces polyèdres se comporteront donc comme le feraient des polyèdres d'ordre ternaire et de même classe.

Dans les 10ᵉ, 11ᵉ, 13ᵉ, 14ᵉ et 15ᵉ classes, on aura la double solution de la cristallisation indifféremment sénaire ou ternaire.

Dans les 12ᵉ et 16ᵉ classes, la cristallisation se fera suivant le système sénaire.

Polyèdres des 17ᵉ, 18ᵉ, 19ᵉ, 20ᵉ et 21ᵉ classes. — Tous ces polyèdres possèdent quatre axes ternaires, et trois autres axes, rectangulaires entre eux, dont la symétrie est tantôt binaire, tantôt quaternaire. Ces éléments de symétrie se retrouvent dans l'Assemblage terquaternaire; c'est donc dans ce système que leur cristallisation devra s'opérer. Les polyèdres de la 21ᵉ classe donneront lieu à des cristaux holoédriques; ceux des autres classes seront mériédriques.

Polyèdres des 22ᵉ et 23ᵉ classes. — J'ai montré dans mon Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique (théorème LVIII) que les polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P]$ possédaient les axes de symétrie des polyèdres de la 17ᵉ classe, et que les polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2]$ possédaient la symétrie complète des polyèdres de la 18ᵉ classe; ces polyèdres cristalliseront donc dans le système terquaternaire, et l'on aura,

pour les polyèdres de la 22ᵉ classe, $S_c = [4L^3, 3L^2, 0C, 0P]$,
pour les polyèdres de la 23ᵉ classe, $S_c = [4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$.

Si maintenant nous faisons le relevé méthodique des différents cas que nous venons de passer en revue, et si nous distribuons nos divers groupes de polyèdres parmi les sept systèmes cristallins, en rangeant sous l'en-tête de chaque système toutes les formes polyédrales qui s'y rapportent, nous obtiendrons une nouvelle classification des polyèdres moléculaires distribués suivant le mode de structure de leurs Assemblages cristallins. Le Tableau n° VIII offre le résultat de ce travail.

On a rapproché les uns des autres tous les genres de polyèdres dont le polyèdre équivalent offre la même symétrie. La deuxième colonne du Tableau exprime les éléments de symétrie du polyèdre équivalent, c'est-à-dire ceux de ces éléments qui se trouvent à la fois dans le polyèdre et dans l'Assemblage.

On remarquera que, si l'on compare le symbole de l'Assemblage et celui du polyèdre équivalent, les mêmes lettres y désignent toujours les mêmes éléments; mais, si l'on compare le symbole du polyèdre équivalent avec celui du polyèdre moléculaire, cette correspondance n'a pas toujours lieu. C'est ainsi que le polyèdre $[\Lambda^{6j\pm1}, (6j\pm1)\,L^2, 0C, \Pi, (6j\pm1)\,P]$ a pour polyèdre équivalent $[\Lambda^2, 0L^2, 0C, P, P']$; les éléments L^2, Π, P du polyèdre donné, en se transmettant à l'Assemblage, s'y changent en Λ^2, P, P' et figurent, sous cette nouvelle forme, dans le deuxième symbole.

Toutes les fois qu'on a dû faire figurer dans la première colonne un polyèdre ayant un axe principal d'ordre indéterminé, mais appartenant à l'une des formes

$$6j,\quad 6j\pm1,\ldots,\quad 12j\pm2,\quad 12j\pm4,\ldots,$$

où j est un nombre entier quelconque, on a ajouté immédiatement après, dans la même colonne, le symbole du polyèdre le plus simple de toute la série, c'est-à-dire du polyèdre correspondant à la valeur *minimum* du nombre j.

On remarquera que, dans les systèmes quaternaire et sénaire, la colonne intitulée « Symbole de la symétrie du polyèdre équivalent » contient quelques cas de doubles solutions. En voici l'explication.

On se rappelle que, dans le système quaternaire, il existe des axes binaires L^2 de première espèce, de paramètre égal à a, et des axes binaires L'^2 de deuxième espèce, de paramètre égal à $a\sqrt{2}$. Les plans de symétrie P^2, P'^2

normaux à ces axes sont aussi de deux espèces différentes. Lorsque le polyèdre moléculaire ne possède qu'une seule de ces deux espèces d'axes, rien n'indique d'avance si ceux-ci en se transmettant à l'Assemblage y deviendront des axes de première espèce et de paramètre a, ou des axes de deuxième espèce et de paramètre $a\sqrt{2}$. La symétrie S_c du polyèdre équivalent sera dénotée différemment, suivant l'un ou l'autre de ces deux cas. Ainsi le polyèdre moléculaire $[A^2, 2L^2, 0C, 2P]$ peut se placer par rapport à son Assemblage quaternaire de manière à ce que ses axes $2L^2$ se couchent, soit sur les deux axes binaires de première espèce, soit sur les deux axes binaires de deuxième espèce de l'Assemblage. Dans le premier cas, on aura

$$S_c = [A^2, 2L^2, 0C, 2P'^2],$$

et, dans le second cas,

$$S_c = [A^2, 2L'^2, 0C, 2P^2].$$

Dans tout Assemblage sénaire, il existe des axes binaires $3L^2$ qui sont de première espèce et de paramètre égal à a, et des axes binaires $3L'^2$ qui sont de deuxième espèce et de paramètre égal à $a\sqrt{3}$. Il en est de même pour les plans de symétrie normaux à ces axes. Lors donc que le polyèdre moléculaire ne possédera qu'une seule de ces deux espèces d'axes, ou une seule de ces deux espèces de plans, il y aura lieu à des doubles solutions, provenant de ce que les axes ou plans de symétrie de la molécule pourront coïncider tantôt avec les éléments de première espèce, tantôt avec les éléments de deuxième espèce de l'Assemblage.

Ces différences, qui tiennent à la nature des choses, doivent d'autant moins être passées sous silence, qu'elles peuvent se traduire au dehors par la prédominance de telles ou de telles formes cristallines.

Définitions. — Nous désignerons dorénavant sous le nom d'*axes communs*, *plans de symétrie communs* dans un Assemblage ceux qui appartiennent aussi au polyèdre moléculaire, et sous le nom d'*axes déficients*, *plans de symétrie déficients* d'un Assemblage ceux qui n'existent pas dans ce polyèdre.

Les doubles solutions que nous venons d'indiquer consisteront donc en ce que les axes ou plans de symétrie communs pourront être tantôt ceux de première espèce, et tantôt ceux de deuxième espèce.

§ III. — *De l'influence qu'exerce la symétrie du polyèdre moléculaire sur la figure des formes cristallines obliques.*

Lorsque le polyèdre moléculaire possède tous les éléments de symétrie de l'Assemblage, toutes les faces de même espèce sont identiques ; par conséquent, le nombre des faces des formes cristallines n'éprouve aucune réduction, et le cristal est holoédrique.

Il n'en est pas de même dans le cas contraire. Je supposerai que le symbole de la symétrie de l'Assemblage soit

$$[QL^q, Q' L^{q'}, Q'' L^{q''}, C, pP, p'P', p'' P''],$$

tandis que la symétric commune à l'Assemblage et au polyèdre moléculaire sera représentée par

$$S_c = [Q_1 L^{q_1}, Q'_1 L^{q'_1}, Q''_1 L^{q''_1}, cC, p_1 P, p'_1 P', p''_1 P''].$$

Je me bornerai dans ce paragraphe à considérer la réduction numérique qu'éprouve le système des faces homologues d'une face donnée (ghk), dans le cas où cette face sera oblique, c'est-à-dire n'offrira aucune particularité de position, n'étant ni parallèle ni normale à aucun des axes de symétrie du système. La forme complète ou holoédrique continuera à être désignée par $\{ghk\}$. La forme mériédrique le sera par le nouveau symbole $\mu\ \{ghk\}$.

Je vais examiner l'effet qu'exercera la symétrie déficiente du polyèdre moléculaire sur ces formes obliques, dans les cristaux mériédriques, et je discuterai le cas des formes restreintes dans le paragraphe suivant.

Puisque $[Q_1 L^{q_1}, Q'_1 L^{q'_1}, Q''_1 L^{q''_1}]$ représente, par hypothèse, le système des axes communs de l'Assemblage et du polyèdre, il est clair qu'à chaque face (ghk) correspondront $(q_1 - 1)$ faces directement semblables et identiques à (ghk), distribuées autour de chacun des axes de symétrie L^{q_1}, et par conséquent

$(q_1 - 1)\, Q_1$ faces homologues, par rapport aux axes $Q_1 L^{q_1}$,

$(q'_1 - 1)\, Q'_1$ faces homologues, par rapport aux axes $Q'_1 L^{q'_1}$,

$(q''_1 - 1)\, Q''_1$ faces homologues, par rapport aux axes $Q''_1 L^{q''_1}$;

ainsi l'on déterminera le nombre total des faces directement semblables et

identiques, par la formule

$$1 + (q_1 - 1)\,Q_1 + (q'_1 - 1)\,Q'_1 + (q''_1 - 1)\,Q''_1,$$

qui est l'analogue de celle déjà obtenue à la page 108 de ce Mémoire.

Si l'on compare ce nombre avec celui des faces directement semblables dans la forme holoédrique, représenté par

$$1 + (q - 1)\,Q + (q' - 1)\,Q' + (q'' - 1)\,Q'',$$

on trouvera que leur rapport est celui de 1 à 2 ou de 1 à 4 (*), sauf dans le cas où l'on aurait

$$q_1 = q, \quad q'_1 = q', \quad q''_1 = q'',$$
$$Q_1 = Q, \quad Q'_1 = Q', \quad Q''_1 = Q'';$$

car alors ce rapport serait égal à l'unité.

Si donc l'on pose

$$\frac{1 + (q_1 - 1)\,Q_1 + (q'_1 - 1)\,Q'_1 + (q''_1 - 1)\,Q''_1}{1 + (q - 1)\,Q + (q' - 1)\,Q' + (q'' - 1)\,Q''} = \gamma',$$

γ' étant le rapport de ces nombres de faces, rapport susceptible des trois valeurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, et si l'on continue à appeler N le nombre des faces de la forme oblique holoédrique $\{ghk\}$, donné par l'équation connue

$$N = 2\,\{1 + (q - 1)\,Q + (q' - 1)\,Q' + (q'' - 1)\,Q''\},$$

le nombre des faces directement semblables contenues dans la forme mérié-

(*) La comparaison de la deuxième colonne du Tableau n° VIII avec les symboles de symétrie des sept systèmes cristallins montre facilement que « tout polyèdre qui possède tous les axes binaires d'un Assemblage en possède aussi nécessairement les autres axes; » il en résulte que, parmi les axes déficients, se trouvent toujours compris des axes binaires. Cela étant admis, soit x le nombre des faces directement semblables de la forme mériédrique; si l'on fait tourner le système de ces faces autour de l'un des axes binaires de S_d, on obtient, en réunissant les nouvelles positions des faces aux anciennes, un système de $2x$ faces directement semblables, et qui seront identiques, relativement à un polyèdre moléculaire qui, outre les axes L^{q_1}, $L^{q'_1}$, $L^{q''_1}$, posséderait l'axe de rotation comme axe de symétrie binaire. Si ce nouveau polyèdre ne contient pas encore tous les axes binaires de l'Assemblage, soit $S_{d'}$ sa nouvelle symétrie déficiente, et faisons-le tourner autour de l'un des axes binaires de $S_{d'}$; on obtiendra un système de $4x$ faces, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à un polyèdre qui possède tous les axes de symétrie du polyèdre holoédrique, et alors le nombre total des faces homologues ainsi obtenues sera $\frac{1}{2}$ N; donc on doit avoir

ou $x = \frac{1}{2}\,N$,

ou $2x = \frac{1}{2}\,N$,

ou $4x = \frac{1}{2}\,N$, etc.

drique $\mu\{ghk\}$ sera

$$\tfrac{1}{2}N\gamma'.$$

Définitions. — Lorsque l'on aura $\gamma' = 1$, le polyèdre sera dit *holoaxe;* il possédera tous les axes de symétrie de l'Assemblage.

Lorsque l'on aura $\gamma' = \frac{1}{2}$, le polyèdre sera dit *hémiaxe;* un polyèdre holoaxe pourvu d'un axe principal devient hémiaxe, lorsqu'il perd ses axes non principaux, ou lorsque le numéro d'ordre de son axe principal devient moitié moindre; un polyèdre sphéroédrique holoaxe devient hémiaxe, lorsque les numéros d'ordre de ses axes pairs deviennent moitié moindres. Il peut arriver que l'hémiaxie fasse disparaître les axes de symétrie; c'est ainsi que le polyèdre [oL, oC, P] peut être considéré comme un polyèdre hémiaxe du système binaire [A^2, C, Π].

Lorsque l'on aura $\gamma' = \frac{1}{4}$, le polyèdre sera dit *tétartoaxe;* un polyèdre à axe principal et holoaxe devient tétartoaxe par la suppression de ses axes binaires et la réduction à moitié du numéro d'ordre de son axe principal. Ainsi [A^3, oL^2, oC, oP] est tétartoaxe par rapport au polyèdre [A^6, $3L^2$, $3L'^2$, oC, oP].

Lorsque l'on fait tourner la forme mériédrique $\mu\{ghk\}$ de 180 degrés autour de l'un des axes binaires déficients de l'Assemblage, on obtient une nouvelle forme $\mu'\{ghk\}$ que nous nommerons *forme conjuguée de* $\mu\{ghk\}$.

Dans les polyèdres holoaxes, les formes cristallines ne possèdent pas de formes conjuguées.

Dans les polyèdres hémiaxes, à chaque forme cristalline correspond sa forme conjuguée qui, étant réunie à la forme primitive, constituera une forme holoaxe.

Enfin, dans les polyèdres tétartoaxes, à chaque forme cristalline correspondent trois formes conjuguées distinctes, et la réunion des quatre formes conjuguées reproduira la forme holoaxe.

Voyons maintenant s'il existe des faces inversement semblables dans la forme mériédrique $\mu\{ghk\}$.

Si l'on a $c = p_1 = p'_1 = p''_1 = 0$, il est clair qu'il ne peut exister de face inversement semblable, identique à (ghk) (*). Donc alors le nombre total des faces de la forme $\mu\{ghk\}$ sera égal à $\frac{1}{2}N\gamma'$.

Si au contraire on a $c = 1$, ou p_1, ou p'_1, ou $p''_1 > 0$, c'est-à-dire s'il

(*) Sauf cependant dans un cas relatif au système quaternaire, cas qui sera examiné à la page 229.

existe un centre de symétrie, ou un ou plusieurs plans de symétrie dans le polyèdre, la face (ghk) aura au moins une face inversement semblable qui lui sera identique: or, à cette dernière face correspondront $\frac{1}{2}N\gamma' - 1$ homologues qui lui seront identiques et directement semblables; donc alors il existera $\frac{1}{2}N\gamma'$ faces identiques, toutes inversement semblables à (ghk), et le nombre total des faces de $\mu(ghk)$ sera égal à $N\gamma'$.

D'où l'on voit que le nombre des faces de $\mu\{ghk\}$ peut être représenté par $N\gamma'\gamma''$, γ'' étant un coefficient égal à 1, si l'on a c, ou p_1, ou p'_1, ou $p''_1 > 0$, et égal à $\frac{1}{2}$, si l'on a $c = p_1 = p'_1 = p''_1 = 0$.

Tout polyèdre moléculaire qui ne possède ni centre ni plans de symétrie, mais seulement un ou plusieurs axes, sera appelé *polyèdre hémisymétrique;* les formes cristallines auxquelles donnera lieu un tel polyèdre ne renfermeront jamais que des faces directement semblables entre elles.

Tout polyèdre moléculaire qui possède un centre de symétrie sera dit *polyèdre centré*. Le centre de symétrie sera toujours accompagné de plans de symétrie, s'il existe des axes d'ordre pair dans le polyèdre.

Enfin, tout polyèdre moléculaire dépourvu de centre, mais possédant un ou plusieurs plans de symétrie, sera appelé *polyèdre dichosymétrique*. Les formes cristallines auxquelles donnent naissance les polyèdres centrés ou dichosymétriques se composeront toujours de faces directement semblables et d'un nombre égal de faces inversement semblables.

De là résulte la classification suivante des polyèdres moléculaires :

1°. Holoaxes centrés ou holoédriques,

2°. Holoaxes hémisymétriques,

3°. Hémiaxes centrés,

4°. Hémiaxes dichosymétriques,

5°. Hémiaxes hémisymétriques,

6°. Tétartoaxes centrés,

7°. Tétartoaxes dichosymétriques,

8°. Tétartoaxes hémisymétriques.

Les mêmes désignations peuvent s'appliquer aux cristaux auxquels ces polyèdres donnent naissance.

Dans les cristaux 2°, 3° et 4°, toute forme oblique $\mu\{ghk\}$ est hémiédrique, et n'a que la moitié de ses faces.

Dans les cristaux 5°, 6° et 7°, toute forme oblique $\mu\{ghk\}$ est tétartoédrique, et ne conserve que le quart de ses faces.

Enfin, dans les cristaux 8°, toute forme oblique $\mu\{ghk\}$ est hémitétartoédrique, et ne conserve que le huitième de ses faces.

La classification que nous venons de faire a pour but de réunir sous un titre collectif des cristaux mériédriques jouissant de propriétés géométriques ou physiques qui leur sont communes. Ainsi nous verrons, dans la troisième partie de ce Mémoire, les cristaux hémiaxes donner lieu à des phénomènes d'emboîtement que l'on n'observe pas sur les cristaux holoaxes. Tous les cristaux connus jusqu'à ce jour comme doués de pouvoirs rotatoires optiques appartiennent à la catégorie des cristaux hémisymétriques. Tous les cristaux connus jusqu'à ce jour comme jouissant de propriétés pyroélectriques (sauf le mésotype et la prehnite, qui n'ont été que peu étudiés) sont des cristaux hémiaxes dichosymétriques.

L'hémiédrie à faces parallèles des cristallographes allemands correspond au cas des polyèdres centrés, et l'hémiédrie à faces inclinées, au cas des polyèdres dichosymétriques ou hémisymétriques.

Nous allons maintenant passer en revue les effets de la mériédrie sur les formes cristallines obliques, dans les différents systèmes cristallins. Cette analyse nous conduira à une classification des cristaux mériédriques identique au fond à celle proposée par M. Frankenheim, dans les *Acta Academiæ naturæ Curiosorum*, t. XIX, 2e partie.

Pour obtenir tous les cas de mériédrie possibles, on désassociera les N faces de la forme holoédrique, en rangeant sous le même en-tête celles de ces faces qui restent toujours associées entre elles, quelle que soit la symétrie déficiente du polyèdre moléculaire. Dans les tableaux suivants, en tête de la première colonne figurent les éléments de symétrie qui servent à faire dériver les faces de cette première colonne de la face déterminante de la forme, face (ghk) ou $(ghik)$. En tête de chacune des autres colonnes figurent les éléments de symétrie qui servent à faire dériver les faces de cette colonne des faces de la première colonne. Ce mode de distribution des faces est tout à fait analogue à celui qu'ont employé M. Miller, dans son *Traité de cristallographie*, et plus tard M. Frankenheim, dans son *System der Krystalle*.

Tableau des 48 faces de $\{ghk\}$, *dans le Système terquaternaire.*

Col. I.	Col. II.	Col. III.	Col. IV.
$3L^2, 4L^3$	$3L^{2\cdot 2}, 6L'^2$	$C, 3P^2$	$6P$
$g\,h\,k$	$g\,k\,\bar{h}$	$\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{k}$	$\bar{g}\,\bar{k}\,h$
$g\,\bar{h}\,\bar{k}$	$g\,\bar{k}\,h$	$\bar{g}\,h\,k$	$\bar{g}\,k\,\bar{h}$
$\bar{g}\,h\,\bar{k}$	$\bar{g}\,k\,h$	$g\,\bar{h}\,k$	$g\,\bar{k}\,\bar{h}$
$\bar{g}\,\bar{h}\,k$	$\bar{g}\,\bar{k}\,\bar{h}$	$g\,h\,\bar{k}$	$g\,k\,h$
$h\,k\,g$	$h\,g\,\bar{k}$	$\bar{h}\,\bar{k}\,\bar{g}$	$\bar{h}\,\bar{g}\,k$
$h\,\bar{k}\,\bar{g}$	$h\,\bar{g}\,k$	$\bar{h}\,k\,g$	$\bar{h}\,g\,\bar{k}$
$\bar{h}\,k\,\bar{g}$	$\bar{h}\,g\,k$	$h\,\bar{k}\,g$	$\bar{h}\,\bar{g}\,\bar{k}$
$\bar{h}\,\bar{k}\,g$	$\bar{h}\,\bar{g}\,\bar{k}$	$h\,k\,\bar{g}$	$h\,g\,k$
$k\,g\,h$	$k\,h\,\bar{g}$	$\bar{k}\,\bar{g}\,\bar{h}$	$\bar{k}\,\bar{h}\,g$
$k\,\bar{g}\,\bar{h}$	$k\,\bar{h}\,g$	$\bar{k}\,g\,h$	$\bar{k}\,h\,\bar{g}$
$\bar{k}\,g\,\bar{h}$	$\bar{k}\,h\,g$	$k\,\bar{g}\,h$	$k\,\bar{h}\,\bar{g}$
$\bar{k}\,\bar{g}\,h$	$\bar{k}\,\bar{h}\,\bar{g}$	$k\,g\,\bar{h}$	$k\,h\,g$

Pour dresser ce tableau, on a d'abord séparé $\{ghk\}$ en ses deux demi-formes directe et inverse, puis on a réuni dans la colonne I les douze faces directement semblables entre elles par rapport aux axes $3L^2$, $4L^3$, qui constituent la symétrie minimum du polyèdre moléculaire susceptible de cristalliser dans ce système.

Les faces $(g\bar{h}\bar{k})$, $(\bar{g}h\bar{k})$, $(\bar{g}\bar{h}k)$ sont les homologues de (ghk) par rapport aux axes $3L^2$, qui sont les trois axes coordonnés de l'Assemblage, rectangulaires entre eux. Si l'on prend les homologues de ces quatre premières faces par rapport aux axes ternaires, au moyen des permutations circulaires des caractéristiques, on achèvera de former la colonne I. Cette colonne porte en tête le symbole $[3L^2, 4L^3]$ qui indique comment les faces qu'elle contient dérivent les unes des autres.

La colonne II dérive de la colonne I en permutant entre elles les deux dernières caractéristiques, et changeant ensuite le signe de la dernière; géométriquement, cela revient à faire tourner de 90 degrés la face autour de l'axe coordonné auquel se rapporte la première caractéristique.

Cette colonne porte en tête le symbole $3L^{2\cdot 2}$, $6L'^2$, qui indique que les

axes $3L^2$ sont devenus quaternaires, et que le polyèdre moléculaire a gagné les six axes binaires $6L'^2$.

La colonne III dérive de la colonne I en changeant les signes de toutes les caractéristiques; on obtient ainsi les faces parallèles et opposées à celles de la colonne I, ce qui indique que le polyèdre moléculaire est maintenant pourvu d'un centre de symétrie; comme les plans $3P^2$ accompagnent toujours ce centre, l'en-tête de la colonne sera C, $3P^2$.

De même la colonne IV dérive de la colonne II par le changement de signe des caractéristiques; mais, comme on peut aussi faire dériver les faces de la colonne IV de celles de la colonne I au moyen des plans de symétrie $6P$, on a écrit ce dernier symbole en tête de la colonne IV.

Ces différents modes de dérivation géométrique peuvent se suivre facilement sur la *fig.* 10 qui représente, en projection orthogonale, la distribution des pôles des faces (c'est-à-dire des points de tangence de ces faces avec la sphère inscrite à la forme) sur l'hémisphère supérieur d'une sphère que coupe en deux un plan normal à l'un des trois axes quaternaires de l'Assemblage. Cet axe est pris pour axe des z et se projette orthogonalement sur le point O; OX, OY sont les moitiés positives des deux autres axes quaternaires. Le plan XOY étant un plan de symétrie du système, les pôles des faces de l'hémisphère inférieur ont les mêmes projections que ceux des faces de l'hémisphère supérieur; on passe de ceux-ci à ceux-là en changeant le signe de la troisième caractéristique. Les pôles 111, $1\bar{1}1$, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}1$ sont les extrémités supérieures des quatre axes ternaires du système.

Un polyèdre moléculaire de symétrie connue étant donné, pour obtenir les faces de sa forme mériédrique $\mu\{ghk\}$ il suffira de réunir entre elles les colonnes dont les en-tête forment, étant rapprochés, le symbole complet de sa symétrie. C'est ce que nous allons faire voir, en passant successivement en revue les différentes espèces de polyèdres qui cristallisent dans le système terquaternaire.

Polyèdre $[3L^2, 4L^3, 0C, 0P]$; la forme terminée par les faces de la colonne I sera sa forme mériédrique. Elle comprend douze faces; elle est donc tétartoédrique; on pourrait l'appeler *forme hémiaxe hémisymétrique*

Polyèdre $[3L^2, 4L^3, C, 3P^2]$; la forme est terminée par les faces des colonnes I et III : on peut la désigner sous le nom de *forme hémiaxe centrée*.

Polyèdre $[3L^2,\ 4L^3,\ oC,\ 6P]$; la forme correspondante est terminée par toutes les faces des colonnes I et IV : on pourrait l'appeler *forme hémiaxe dichosymétrique*.

Polyèdre $[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ oC,\ oP]$; la forme $\mu\{ghk\}$ est terminée par toutes les faces des colonnes I et II, et peut être désignée sous le nom de *forme holoaxe hémisymétrique*. En réunissant les en-tête des colonnes pour reconstituer le symbole, il faut avoir soin de changer $3L^{2\cdot 2}$ en $3L^4$.

Ces trois dernières formes sont hémiédriques.

Polyèdre $[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ C,\ 3P^4,\ 6P^2]$; la forme est holoédrique et comprend les quarante-huit faces du tableau : en réunissant les symboles des en-tête, on devra changer $3P^2$ en $3P^4$ et $6P$ en $6P^2$.

Les formes hémiaxe hémisymétrique, hémiaxe dichosymétrique, holoaxe hémisymétrique sont les formes hémiédriques à faces inclinées des cristallographes allemands. La forme hémiaxe centrée est la forme hémiédrique à faces parallèles.

Tableau des 24 faces de $\{ghik\}$, dans le Système sénaire.

Col. I.	Col. II.	Col. III.	Col. IV.	Col. V.	Col. VI.	Col. VII.	Col. VIII.
A^3	$A^{3\cdot 2}$	$3L^2$	$3L'^2$	C	Π	$3P$	$3P'$
$ghik$	$\bar{g}\bar{h}\bar{i}k$	$gih\bar{k}$	$\bar{g}\bar{i}\bar{h}\bar{k}$	$\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}$	$ghi\bar{k}$	$\bar{g}\bar{i}\bar{h}k$	$gihk$
$higk$	$\bar{h}\bar{i}\bar{g}k$	$ihg\bar{k}$	$\bar{i}\bar{h}\bar{g}\bar{k}$	$\bar{h}\bar{i}\bar{g}\bar{k}$	$hig\bar{k}$	$\bar{i}\bar{h}\bar{g}k$	$ihgk$
$ighk$	$\bar{i}\bar{g}\bar{k}h$	$hgi\bar{k}$	$\bar{h}\bar{g}\bar{i}\bar{k}$	$\bar{i}\bar{g}\bar{h}\bar{k}$	$igh\bar{k}$	$\bar{h}\bar{g}\bar{i}k$	$hgik$

Pour dresser ce tableau, on a d'abord séparé $\{ghik\}$ en ses deux demi-formes directe et inverse, puis on a réuni, dans la colonne I, la face déterminante $(ghik)$ avec les deux faces directement semblables, que l'on obtient par des rotations de 120 degrés de $(ghik)$ autour de l'axe principal considéré comme simplement ternaire; pour cela, il suffit de permuter circulairement les caractéristiques g, h et i. L'on a écrit le symbole A^3 en tête de cette colonne.

La colonne II comprend les trois nouvelles faces directement semblables à $(ghik)$ que l'on déduit des précédentes en considérant l'axe A^3 comme un axe à la fois ternaire et binaire, c'est-à-dire en changeant A^3 en A^6.

Les colonnes III et IV comprennent les faces homologues de (*ghik*) par rapport aux axes $3L^2$ et $3L'^2$ de l'Assemblage.

La demi-forme directe étant épuisée, on obtiendra les colonnes V, VI, VII et VIII, en changeant tous les signes des caractéristiques dans les colonnes I, II, III et IV. Les en-tête de ces nouvelles colonnes représentent les éléments de symétrie qui peuvent servir à faire dériver directement les faces de chacune de ces colonnes au moyen des faces de la colonne I.

On trouvera représentées, dans la *fig.* 11, les positions des pôles des faces qui dépendent de l'hémisphère supérieur, la sphère étant censée coupée en deux par un plan normal à l'axe sénaire, et les projections étant supposées orthogonales. Le plan de projection contient les axes binaires de première espèce OX, OY, OT; $10\bar{1}0$, $01\bar{1}0$, $\bar{1}100$, $\bar{1}010$, $0\bar{1}10$, $1\bar{1}00$ sont les extrémités des axes binaires de deuxième espèce. Le plan XYT étant un plan de symétrie du système, les pôles des faces de l'hémisphère inférieur ont mêmes projections que ceux des faces de l'hémisphère supérieur; on peut passer des uns aux autres en changeant le signe de k.

Si maintenant on veut savoir quelles sont les faces de la forme $\mu\{ghik\}$, pour l'un quelconque des polyèdres moléculaires qui cristallisent dans le système sénaire, et dont le Tableau n° VIII nous donne la liste générale, il suffira de réunir entre elles les colonnes dont les en-tête embrassent les divers éléments de la symétrie S_c du polyèdre. Voici le résultat de cette analyse.

Polyèdre $[A^3, oL^2, oC, oP]$; la forme est terminée par les trois faces de la colonne I; on peut la nommer *forme tétartoaxe hémisymétrique*. Elle est hémitétartoédrique.

Polyèdre $[A^3, oL^2, C, oP]$; forme terminée par les faces des colonnes I et V; on peut la nommer *forme tétartoaxe centrée*.

Polyèdre $[A^3, oL^2, oC, \Pi]$; forme terminée par les faces des colonnes I et VI; on la nommera *forme tétartoaxe dichosymétrique principale*.

Polyèdre $[A^3, oL^2, oC, 3P]$; forme terminée par les faces des colonnes I et VII; on la nommera *forme tétartoaxe dichosymétrique de première espèce*.

Polyèdre $[A^3, oL^2, oC, 3P']$; forme terminée par les faces des colonnes I et VIII; on la nommera *forme tétartoaxe dichosymétrique de deuxième espèce*.

Polyèdre $[A^6, oL^2, oC, oP]$; forme terminée par les six faces des colonnes I et II; on la nommera *forme hémiaxe hémisymétrique principale.*

Polyèdre $[A^3, 3L^2, oC, oP]$; forme terminée par les faces des colonnes I et III; on peut la nommer *forme hémiaxe hémisymétrique de première espèce.*

Polyèdre $[A^3, 3L'^2, oC, oP]$; forme terminée par les faces des colonnes I et IV; on peut la nommer *forme hémiaxe hémisymétrique de deuxième espèce.*

Toutes ces formes sont tétartoédriques.

Polyèdre $[A^6, oL^2, C, \Pi]$; forme terminée par les douze faces des colonnes I, II, V et VI; on peut la nommer *forme hémiaxe centrée principale.*

Polyèdre $[A^3, 3L^2, C, 3P^2]$; forme terminée par les douze faces des colonnes I, III, V et VII; on peut la nommer *forme hémiaxe centrée de première espèce.* C'est la forme holoédrique du système ternaire.

Polyèdre $[A^3, 3L'^2, C, 3P'^2]$; forme terminée par les douze faces des colonnes I, IV, V et VIII; on peut la nommer *forme hémiaxe centrée de deuxième espèce.*

Polyèdre $[A^6, oL^2, oC, 3P, 3P']$; forme terminée par les douze faces des colonnes I, II, VII et VIII; on peut la nommer *forme hémiaxe dichosymétrique principale.*

Polyèdre $[A^3, 3L^2, oC, \Pi, 3P']$; forme terminée par les douze faces des colonnes I, III, VI et VIII; on peut la nommer *forme hémiaxe dichosymétrique de première espèce.*

Polyèdre $[A^3, 3L'^2, oC, \Pi, 3P]$; forme terminée par les douze faces des colonnes I, IV, VI et VII; on peut la nommer *forme hémiaxe dichosymétrique de deuxième espèce.*

Polyèdre $[A^6, 3L^2, 3L'^2, oC, oP]$; forme terminée par les douze faces des colonnes I, II, III et IV; on la nommera *forme holoaxe hémisymétrique.*

Toutes ces formes sont hémiédriques.

Polyèdre $[A^6, 3L^2, 3L'^2, C, \Pi, 3P^2, 3P'^2]$; forme terminée par les vingt-quatre faces du tableau, ou *forme holoaxe centrée.* C'est la forme holoédrique du système sénaire.

Quelques-unes de ces formes reproduisent, soit la forme holoédrique, soit les formes mériédriques du système ternaire : on ne peut alors reconnaître

si la cristallisation s'est opérée dans le système ternaire ou dans le système sénaire, qu'en tenant compte du clivage et de la densité réticulaire des faces dominantes.

Tableau des 16 faces de $\{g\,h\,k\}$, *dans le Système quaternaire.*

Col. I.	Col. II.	Col. III.	Col. IV.	Col. V.	Col. VI.	Col. VII.	Col. VIII.
A^4	$A^{4 \cdot 3}$	$2L^2$	$2L'^2$	C, Π	π	2P	2P'
$g\,h\,k$ $\bar{g}\,\bar{h}\,k$	$h\,\bar{g}\,k$ $\bar{h}\,g\,k$	$g\,h\,\bar{k}$ $\bar{g}\,h\,\bar{k}$	$h\,g\,\bar{k}$ $\bar{h}\,\bar{g}\,\bar{k}$	$\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{k}$ $g\,h\,\bar{k}$	$\bar{h}\,g\,\bar{k}$ $h\,\bar{g}\,\bar{k}$	$\bar{g}\,h\,k$ $g\,\bar{h}\,k$	$\bar{h}\,\bar{g}\,k$ $h\,g\,k$

On a dressé ce tableau d'après les mêmes principes qui ont servi à dresser celui du système sénaire, avec cette différence que les faces se groupent, non plus de trois en trois, mais de deux en deux, et que le symbole du plan de symétrie Π, qui accompagne toujours le centre C, a dû passer de la sixième à la cinquième colonne. Pour savoir dans quel cas les faces de la sixième colonne devront appartenir à la forme mériédrique $\mu\{ghk\}$ d'un polyèdre moléculaire donné, il suffira de se rappeler que le nombre des faces étant toujours 4, 8 ou 16, le nombre des colonnes à réunir doit toujours être un nombre pair.

La *fig.* 12 montre les projections orthogonales des pôles des faces de l'hémisphère supérieur, la sphère étant coupée en deux par le plan normal à l'axe principal. Les droites OX, OY sont les axes binaires de première espèce de l'Assemblage; $1\,1\,0$, $\bar{1}\,\bar{1}\,0$, $\bar{1}\,1\,0$, $1\,\bar{1}\,0$ sont les extrémités des axes de deuxième espèce. Les pôles des faces de l'hémisphère inférieur ont mêmes projections que ceux de l'hémisphère supérieur : on passerait de ceux-ci à ceux-là en changeant le signe de la caractéristique k.

Les différents cas qui peuvent se présenter sont les suivants :

Polyèdre $[A^4, oL^2, oC, oP]$; la forme est terminée par les quatre faces des colonnes I et II: en réunissant les en-tête de ces colonnes, on remplacera $A^{2\cdot 2}$ par A^4; cette forme pourra être appelée *forme hémiaxe hémisymétrique*. Elle est tétartoédrique.

Polyèdre $[A^4, oL^2, C, \Pi]$; forme terminée par les huit faces des colonnes I, II, V et VI; on la nommera *forme hémiaxe centrée*.

Polyèdre $[A^4, 0L^2, 0C, 2P, 2P']$; forme terminée par les huit faces des colonnes I, II, VII et VIII; on peut la nommer *forme hémiaxe dichosymétrique principale*.

Polyèdre $[A^2, 2L^2, 0C, 2P']$; forme terminée par les huit faces des colonnes I, III, VI et VIII; on peut la nommer *forme hémiaxe dichosymétrique de première espèce*.

Polyèdre $[A^2, 2L'^2, 0C, 2P]$; forme terminée par les huit faces des colonnes I, IV, VI et VII; ce sera la *forme hémiaxe dichosymétrique de deuxième espèce*.

Polyèdre $[A^4, 2L^2, 2L'^2, 0C, 0P]$; forme terminée par les huit faces des colonnes I, II, III et IV; on peut la nommer *forme holoaxe hémisymétrique*.

Toutes ces formes sont hémiédriques.

Polyèdre $[A^4, 2L^2, 2L'^2, C, \Pi, 2P^2, 2P'^2]$; forme terminée par les seize faces du tableau; on peut la nommer *forme holoaxe centrée*. C'est la forme holoédrique du système quaternaire.

Il serait possible qu'il se rencontrât dans la nature un polyèdre moléculaire dont les sommets homologues seraient disposés quatre à quatre autour d'un axe binaire central, comme le sont dans la *fig.* 12 les pôles ghk, $\bar{g}\bar{h}k$, $\bar{h}g\bar{k}$, $h\bar{g}\bar{k}$, autour de l'axe normal au plan de projection. Un tel polyèdre obéirait à des lois de symétrie différentes de celles que je me suis borné à considérer dans mon Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. Quoique ayant pour symbole de symétrie $[A^2, 0C, 0P]$, il pourrait cristalliser dans le système quaternaire. La forme mériédrique correspondant à ce genre de symétrie moléculaire comprendrait les quatre faces des colonnes I et VI de notre tableau. Ces polyèdres offriraient cette circonstance digne de remarque, que deux faces inversement semblables, telles que (ghk) et $(\bar{h}g\bar{k})$, pourraient être identiques, quoique le polyèdre moléculaire ne possédât ni plans, ni centre de symétrie; rien de pareil n'a lieu pour les polyèdres moléculaires que nous nous sommes bornés à considérer jusqu'ici, ou que nous considérerons par la suite.

J'ai exclu les polyèdres qui offriraient ce singulier genre de symétrie de l'étude générale que j'ai faite des polyèdres symétriques, avec d'autant moins de scrupules qu'il ne paraît pas que ce cas singulier se rencontre dans la nature.

Toutefois, je l'ai admis dans le tableau final (Tableau n° IX) des différentes espèces d'hémiédrie : pour distinguer un tel polyèdre, on pourrait le représenter par le symbole $[A^2,\ oC,\ oP]^4$, l'exposant 4 étant destiné à indiquer que la cristallisation s'opérera dans le système quaternaire.

Tableau des 12 faces de $\{ghik\}$, *dans le Système ternaire.*

Col. I.	Col. II.	Col. III.	Col. IV.
A^2	$3L^2$	C	3P
$g\,h\,i\,k$ $h\,i\,g\,k$ $i\,g\,h\,k$	$g\,i\,h\,\bar{k}$ $i\,h\,g\,\bar{k}$ $h\,g\,i\,\bar{k}$	$\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{i}\,\bar{k}$ $\bar{h}\,\bar{i}\,\bar{g}\,\bar{k}$ $\bar{i}\,\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{k}$	$\bar{g}\,\bar{i}\,\bar{h}\,k$ $\bar{i}\,\bar{h}\,\bar{g}\,k$ $\bar{h}\,\bar{g}\,\bar{i}\,k$

Ce tableau peut être dressé d'après les mêmes principes qui nous ont guidé en dressant le tableau des faces du système sénaire. Du reste, on peut se borner à réunir les colonnes I, III, V et VII de ce dernier tableau, en conservant leurs en-tête.

La *fig.* 13 représente en projection orthogonale les pôles des douze faces de la forme complète ; elle est la répétition de la *fig.* 11, avec cette seule différence que l'on a changé le signe de k pour les pôles $gihk$, $\bar{i}\,\bar{g}\,\bar{h}\,k$, $ihgk$, $\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{i}\,k$, $hgik$ et $\bar{h}\,\bar{i}\,\bar{g}\,k$; les ronds noirs indiquent les pôles des faces de l'hémisphère inférieur.

Il peut se présenter les cinq cas suivants :

Polyèdre $[A^2,\ oL^2,\ oC,\ oP]$; la forme est terminée par les trois faces de la colonne I ; on peut la nommer *forme hémiaxe hémisymétrique*. Elle est tétartoédrique.

Polyèdre $[A^2,\ oL^2,\ C,\ oP]$; la forme comprend les six faces des colonnes I et III ; on peut la nommer *forme hémiaxe centrée*.

Polyèdre $[A^2,\ oL^2,\ oC,\ 3P]$; la forme comprend les six faces des colonnes I et IV ; on peut la nommer *forme hémiaxe dichosymétrique*.

Polyèdre $[A^2,\ 3L^2,\ oC,\ oP]$; la forme correspondante embrasse les six faces des colonnes I et II ; on la nommera *forme holoaxe hémisymétrique*.

Ces trois dernières formes sont hémiédriques.

Polyèdre $[A^2, 3L^2, C, 3P^2]$; forme *holoaxe centrée,* et par conséquent holoédrique, comprenant les douze faces de notre tableau.

Les cinq cas que nous venons d'examiner se retrouvent aussi dans le système sénaire; la disposition des formes prédominantes et le sens des clivages serviront à fixer le choix de l'observateur entre les deux manières différentes dont la cristallisation de la substance pourra être interprétée.

Tableau des 8 faces de la forme $\{ghk\}$, dans le Système terbinaire.

Col. I.	Col. II.	Col. III.	Col. IV.
A^2	L^2, L'^2	C, Π	P, P'
$g\,h\,k$	$g\,\bar{h}\,\bar{k}$	$\bar{g}\,\bar{h}\,\bar{k}$	$\bar{g}\,h\,k$
$\bar{g}\,\bar{h}\,k$	$\bar{g}\,h\,\bar{k}$	$g\,h\,\bar{k}$	$g\,\bar{h}\,k$

On a construit ce tableau d'après les mêmes principes qui ont servi pour les tableaux précédents. On peut l'obtenir en rapprochant l'une de l'autre les colonnes I, III, V et VII du tableau du système quaternaire, en changeant l'en-tête $2L^2$ en L^2, L'^2, et l'en-tête $2P^2$ en P, P'.

La sphère qui contient les pôles des faces étant supposée coupée par le plan Π en deux parties égales, la *fig.* 14 offre les pôles de l'hémisphère supérieur en projection orthogonale sur ce plan. Les droites OX, OY sont les moitiés positives des axes binaires L^2, L'^2. En changeant k en $\bar{k}$ sur la figure, on aura les projections des pôles de l'hémisphère inférieur.

Trois sortes de polyèdres cristallisent dans le système terbinaire.

Polyèdre $[A^2, oL^2, oC, P, P']$; la forme se compose des quatre faces contenues dans les colonnes I et IV; on la nommera *forme hémiaxe dichosymétrique.*

Polyèdre $[A^2, L^2, L'^2, oC, oP]$; la forme se compose des quatre faces contenues dans les colonnes I et II; on la nommera *forme holoaxe hémisymétrique.* Cette forme est hémiédrique, comme la précédente.

Polyèdre $[A^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2]$; la forme comprend les huit faces du tableau; elle est *holoaxe centrée,* et par conséquent holoédrique.

Tableau des 4 faces de la forme $\{g h i k\}$, *dans le Système binaire.*

Col. I.	Col. II.	Col. III.	Col. IV.
"	A^2	C	Π
$g h i k$	$\bar{g} \bar{h} \bar{i} k$	$\bar{g} \bar{h} \bar{i} \bar{k}$	$g h i \bar{k}$

La formation de ce tableau n'offre aucune difficulté, après que l'on a séparé la forme générale en ses deux demi-formes directe et inverse. La colonne I manque d'en-tête ; mais cette circonstance ne peut nous induire en erreur ; car la face $(ghik)$, étant là déterminante de la forme, sert de départ commun à toutes les formes holoédriques ou mériédriques.

La *fig.* 15 offre la projection des pôles sur le plan Π ; OX, OY, OT sont les trois Rangées coordonnées situées dans ce plan ; les pôles supérieurs se projettent sur les projections des inférieurs, le pôle $ghik$ recouvrant $ghi\bar{k}$, et le pôle $\bar{g}\bar{h}\bar{i}k$ recouvrant $\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}$.

On peut avoir, dans ce système cristallin, à considérer les trois polyèdres suivants :

Polyèdre [oL, oC, Π] ; la forme comprend les deux faces des colonnes I et IV ; elle sera dite *forme hémiaxe dichosymétrique.*

Polyèdre [A^2, oC, oP] ; la forme consiste dans les deux faces des colonnes I et II ; elle sera dite *holoaxe hémisymétrique.* Cette forme et la précédente sont hémiédriques.

Polyèdre [A^2, C, Π] ; la forme comprend les quatre faces du tableau ; elle est *holoaxe centrée,* et par conséquent holoédrique.

Tableau des 2 faces de $\{g h k\}$, *dans le Système asymétrique.*

Col. I.	Col. II.
"	C
$g h k$	$\bar{g} \bar{h} \bar{k}$

Il ne peut se présenter que deux cas, selon que le polyèdre moléculaire possède ou non un centre de symétrie.

Polyèdre [oL, oC, oP]; la forme est à une seule face; on peut l'appeler *forme non centrée*. Cette forme est hémiédrique et peut être considérée comme rentrant dans la catégorie générale des formes hémisymétriques.

Polyèdre [oL, C, oP]; la forme est à deux faces parallèles; on peut l'appeler *forme centrée*. C'est une forme holoédrique.

Lorsque la position des axes d'un cristal aura été exactement fixée, la détermination précise d'une seule forme oblique, du nombre et de la situation de ses différentes faces par rapport aux axes et plans de symétrie de l'Assemblage, conduira toujours à la connaissance de l'espèce d'hémiédrie propre au cristal, et, par conséquent, à celle de la symétrie du polyèdre moléculaire ou tout au moins du polyèdre qui lui est équivalent.

Mais comme la cristallisation produit beaucoup plus fréquemment des formes restreintes, parallèles ou normales aux axes, que des formes obliques, comme ces dernières se montrent même assez rarement dans les systèmes cristallins dont la symétrie est la plus élevée, il importe de rechercher quelles modifications la nature de la symétrie propre au polyèdre moléculaire peut exercer sur ces nouvelles formes.

§ IV. — *De l'influence qu'exerce la symétrie du polyèdre moléculaire sur la figure des formes parallèles ou normales.*

Pour déterminer les modifications qu'éprouvent les formes parallèles ou normales dans les cristaux mériédriques, on peut employer deux méthodes différentes, la méthode des symboles et la méthode géométrique.

La première est d'un emploi facile; un exemple suffira pour la faire comprendre.

On demande ce que devient la forme $\{gogk\}$, dans le cas du polyèdre $[A^2, 3L'^2, oC, \Pi, 3P]$ cristallisant dans le système sénaire.

Formez le tableau des faces pour la forme hémiaxe dichosymétrique de deuxième espèce. Pour cela, réunissez dans le petit tableau qui suit les

colonnes I, IV, VI et VII du tableau de la page 225; vous aurez

$g h i k$	$\bar{g} \bar{i} \bar{h} \bar{k}$	$g h i \bar{k}$	$\bar{g} \bar{i} \bar{h} k$
$h i g k$	$\bar{i} \bar{h} \bar{g} \bar{k}$	$h i g \bar{k}$	$\bar{i} \bar{h} \bar{g} k$
$i g h k$	$\bar{h} \bar{g} \bar{i} \bar{k}$	$i g h \bar{k}$	$\bar{h} \bar{g} i k$

Changez dans ce tableau *h* en o et *i* en $\bar{g}$; il deviendra

$g o \bar{g} k$	$\bar{g} g o \bar{k}$	$g o \bar{g} \bar{k}$	$\bar{g} g o k$
$o \bar{g} g k$	$g o \bar{g} \bar{k}$	$o \bar{g} g \bar{k}$	$g o \bar{g} k$
$\bar{g} g o k$	$o \bar{g} g \bar{k}$	$\bar{g} g o \bar{k}$	$o \bar{g} g k$

En comparant ces douze symboles, vous verrez que les six dernières faces se confondent avec les six premières, et que la demi-forme inverse coïncide avec la demi-forme directe. Le nombre des faces réellement distinctes sera donc réduit à six, et il sera facile de reconnaître que la figure de la forme sera un ditrièdre, ou hexaèdre à six triangles isocèles.

Cette méthode de l'identification des symboles a déjà été employée par M. Miller pour faire dériver le nombre des faces des formes restreintes du nombre des faces de la forme oblique, dans le cas de l'holoédrie; on voit que l'on peut l'appliquer avec le même succès aux cristaux mériédriques.

La seconde méthode est basée sur les deux théorèmes suivants :

1°. *Toute forme oblique, en devenant orthoparallèle, perd la moitié de ses faces, si le plan normal à l'axe parallèle à la forme est un plan de symétrie du polyèdre moléculaire; alors les deux demi-formes directe et inverse se confondent. Dans le cas contraire, la forme conserve ses faces.*

2°. *Toute forme normale à un axe* L^q *perd la moitié de ses faces, lorsque le polyèdre moléculaire, cessant d'être holoédrique, ne possède plus ni centre de symétrie, ni plan de symétrie normal à l'axe* L^q*, ni axe d'ordre pair normal à ce même axe; alors, de deux faces parallèles, l'une disparaît, et la forme offre les caractères de l'hémiédrie à faces inclinées. Dans le cas contraire, la forme conserve ses faces.*

La démonstration de ces théorèmes ne saurait offrir de difficultés pour le

lecteur. Pour les appliquer, il suffira de se rappeler la position relative des axes et plans de symétrie de l'Assemblage.

Le Tableau n° IX a été dressé d'après ces principes. Il offre une classification analogue à celle de M. Frankenheim, ou du moins qui n'en diffère que dans des points d'un intérêt secondaire. La deuxième colonne renvoie, pour le détail des faces de chaque forme oblique, aux colonnes des tableaux du paragraphe précédent. Pour distinguer entre elles les formes d'un égal nombre de faces, mais de figures différentes, on a ajouté une grande lettre romaine à ce nombre. Voici la liste et le nom de toutes ces formes :

48, hexakisoctaèdre, tétracontaoctaèdre (*);
24 A, trapézoïdicositétraèdre;
24 B, hexakistétraèdre;
24 C, icositétraèdre pentagonal;
24 D, triakisoctaèdre et trapézoèdre;
24 E, tétrakishexaèdre;
24 F, didodécaèdre (**);
16, dioctaèdre (***);
12 A, de figure variable, non encore observée;
12 B, triakistétraèdre et deltoïdododécaèdre;
12 C, dodécaèdre pentagonal, hémitétrakishexaèdre;
12 D, dodécaèdre rhomboïdal;
12 E, birhomboèdre;
12 F, scalénoèdre, métastatique;
12 G, forme ouverte consistant en un pointement à douze faces; on pourrait l'appeler monakisdodécaèdre;

(*) Dans le cristal régulièrement conformé, chaque face est la section plane d'une pyramide triangulaire à angles dièdres de 90, 60 et 45 degrés, dont les trois arêtes sont l'un des axes quaternaires, l'un des axes ternaires et l'un des axes binaires voisins.

(**) Chaque face est la section d'une pyramide triangulaire à angles dièdres de 90, 90 et 30 degrés, dont les trois arêtes sont l'axe sénaire et deux axes binaires voisins d'espèces différentes.

(***) La face composante résulte de la section plane d'une pyramide triangulaire ayant pour angles dièdres les angles 90, 90 et 45 degrés, et dont les trois arêtes représentent l'axe quaternaire, un axe binaire de première espèce, et un axe binaire voisin de deuxième espèce.

12H, forme consistant en deux ditrièdres de même axe qui se pénètrent; on pourrait l'appeler tétratriscalénoèdre;

12I, forme consistant en deux pointements sextuples réguliers opposés l'un à l'autre, mais qui ne se correspondent pas; on pourrait l'appeler trapézoèdre hexagonal;

12K, prisme dodécaèdre indéfini;

8A, octaèdre régulier;

8B, quadratoctaèdre;

8C, forme ouverte consistant en un pointement à huit faces; on pourrait l'appeler monakisoctaèdre;

8D, forme consistant en huit triangles scalènes égaux; on pourrait la nommer scalénoèdre tétragonal;

8E, forme consistant en deux pointements quadruples réguliers opposés l'un à l'autre, mais qui ne se correspondent pas; on pourrait l'appeler trapézoèdre tétragonal;

8F, prisme octaèdre indéfini;

8G, rhomboctaèdre (*);

6A, cube;

6B, rhomboèdre;

6C, ditrièdre;

6D, forme ouverte consistant en un pointement sextuple irrégulier formé par deux pointements triples réguliers de même axe et de même sommet, qui se pénètrent l'un l'autre; on pourrait l'appeler monakishexaèdre;

6E, pointement sextuple régulier;

6F, trapézoèdre trigonal de Naumann; cette forme consiste en deux pointements triples réguliers, opposés l'un à l'autre aux deux extrémités de l'axe principal, mais qui ne se correspondent pas;

6G, prisme hexaèdre régulier;

6H, prisme hexaèdre irrégulier, mais symétrique;

4A, tétraèdre régulier;

(*) Chaque face est la section d'une pyramide trirectangle, ayant les trois axes binaires pour arêtes.

4 B, pointement quadruple régulier;
4 C, tétraèdre à triangles isocèles égaux;
4 D, prisme carré indéfini;
4 E, pointement quadruple irrégulier, mais symétrique;
4 F, tétraèdre à triangles scalènes égaux, sphénoïde de Naumann;
4 G, prisme rhomboïdal indéfini;
3 A, pointement triple régulier;
3 B, prisme triéquiangle indéfini;
2 A, deux faces parallèles;
2 B, deux faces qui se coupent, biseau.

A l'inspection du Tableau nº IX, on reconnaît que les formes restreintes n'accusent pas toujours l'état mériédrique d'un cristal. Par exemple, dans tous les cristaux holoaxes hémisymétriques des systèmes terquaternaire, sénaire, quaternaire et terbinaire, les formes restreintes sont les mêmes que si le polyèdre moléculaire était holoédrique. Les formes obliques peuvent seules faire reconnaître avec certitude la symétrie holoédrique ou hémiédrique de tels polyèdres, et tant que ces formes obliques n'ont pas été observées sur des échantillons de l'espèce minérale, on ne peut porter qu'un jugement provisoire sur la nature de sa symétrie moléculaire.

On voit aussi que certaines formes se reproduisent sur toutes les variétés mériédriques d'un même système cristallin, et ne peuvent rien apprendre sur la structure de la molécule; tels sont le cube et le dodécaèdre rhomboïdal dans le système terquaternaire; tels sont aussi les prismes à base carrée du système quaternaire. Cependant une observation attentive des formes normales et des formes orthoparallèles suffira le plus souvent à faire reconnaître si la substance est holoédrique, hémiédrique, tétartoédrique, etc.

§ V. — *Exemples de cristaux naturels mériédriques.*

Le nombre des cristaux mériédriques que nous offre la nature est allé sans cesse en augmentant depuis une trentaine d'années, c'est-à-dire depuis l'époque de la découverte de l'hémiédrie par le professeur Weiss; il est probable qu'il s'accroîtra par des observations ultérieures, soit par l'examen attentif d'un nombre plus considérable d'échantillons de substances déjà

connues, mais encore peu abondantes, soit par l'étude des composés cristallins si variés que la chimie parvient aujourd'hui à produire.

Le premier échantillon venu d'une substance n'est pas toujours propre à dévoiler l'hémiédrie de la molécule; elle peut rester cachée sous des formes parallèles ou normales impropres à la dévoiler; mais quelques cas bien nets, dans lesquels une disparition régulière de la moitié ou des trois quarts des faces s'effectue, sans possibilité de recourir à un avortement accidentel, suffiront pour que l'on puisse ranger affirmativement la substance dans la liste des substances mériédriques.

Je vais examiner les principaux cas de mériédrie aujourd'hui connus, en indiquant les signes extérieurs qui les caractérisent. Le Tableau n° IX offre le résumé complet de ces divers indices et va nous servir de guide dans cette revue rapide. L'accord entre la théorie et l'observation ne laisse absolument rien à désirer.

Système terquaternaire.

Polyèdre $[3L^2, 4L^3, C, 3P^2]$, *hémiaxie centrée.* — Ce genre d'hémiédrie appartient aux minéraux suivants :

Sulfure de fer,
Arséniure de cobalt,
Arséniosulfure de cobalt (cobalt gris),
Arséniosulfure de nickel.

L'antimoniosulfure de nickel est supposé posséder la même hémiédrie, par suite de l'isomorphisme de l'arsenic avec l'antimoine.

Ce groupe est caractérisé par l'hémiédrie de la forme $\{gho\}$ qui donne le dodécaèdre pentagonal, et par celle de $\{ghk\}$ qui donne le trapézoïdicositétraèdre : hémiédrie à faces parallèles des minéralogistes allemands, représentée par le symbole $\pi\{ghk\}$, dans la *Cristallographie* de M. Miller.

D'après les recherches de Beudant (*), l'alun appartiendrait à cette division.

On peut concevoir le polyèdre moléculaire comme formé par douze sommets disposés quatre à quatre sur chacun des trois plans de symétrie, de

(*) *Annales de Chimie et Physique*, 2e série, tome VIII, page 23.

manière à y figurer trois rectangles égaux entre eux ; lorsque le petit côté du rectangle est égal au grand segment du grand côté partagé en moyenne et extrême raison, ce polyèdre est un icosaèdre régulier.

Ainsi un polyèdre moléculaire à douze atomes disposés comme les sommets d'un icosaèdre régulier doit cristalliser dans le système de l'hémiaxie centrée; il en serait de même d'un polyèdre à vingt atomes figurant les sommets d'un dodécaèdre régulier, etc.

Polyèdre [$3L^2$, $4L^3$, oC, $6P$], *hémiaxie dichosymétrique*. — Ce groupe comprend, dans la nature, les espèces suivantes :

Sulfure de zinc,
Arséniate de fer,
Silicate de bismuth,
Cuivre gris,
Helvine,
Boracite.

Le chlorure de cuivre $Cu^2 Cl$ cristallise en tétraèdres réguliers; il doit être rapporté à la même symétrie.

Le groupe actuel est caractérisé par l'hémiédrie de l'octaèdre {111} qui se change en un tétraèdre régulier, de {*ggk*} qui se change en un triakistétraèdre, et par celle de {*ghk*} qui donne l'hexakistétraèdre; hémiédrie à faces inclinées des minéralogistes allemands, annotée $\varkappa$ {*ghk*} par M. Miller.

Le type le plus simple de la molécule consiste en quatre atomes disposés en tétraèdre régulier.

L'holoaxie hémisymétrique, dont le défaut de symétrie ne pourrait se dévoiler que sur des formes obliques, et l'hémiaxie hémisymétrique qui pourrait offrir la combinaison des deux genres d'hémiédrie à faces parallèles et à faces inclinées, ne paraissent pas avoir été rencontrées dans la nature. Mais comme il peut exister des cristaux hémiaxes hémisymétriques que nous ne connaissons pas encore, ce serait sans doute aller trop loin que de dire, avec M. Delafosse (*), « que jamais les deux genres de formes (tétraèdre régu« lier et dodécaèdre pentagonal) ne se trouveront réunis dans une série de

(*) *De la Structure des Cristaux*, Thèse; Paris, 1840, page 8.

« cristaux appartenant à une espèce proprement dite, c'est-à-dire composés « des mêmes molécules. »

Système sénaire.

Ce système est très-riche en formes mériédriques variées dont un petit nombre seulement a été observé jusqu'à ce jour.

Polyèdre [A^3, $3L^2$, oC, oP], *hémiaxie hémisymétrique de première espèce.* — A ce genre d'hémiédrie appartiennent les cristaux de quartz. Leur symétrie singulière a beaucoup occupé les minéralogistes : comme exemple d'étude de cristaux mériédriques, nous allons chercher à reconnaître la structure de la molécule du quartz, en prenant pour guide M. Gustave Rose, qui a récemment examiné ce minéral avec le plus grand soin.

On reconnaît une première dissymétrie consistant en ce que la face R (*fig.* 16) appartenant au pointement sextuple terminal est souvent plus grande et d'un plus beau poli que ses deux voisines r', r' : ainsi le pointement supérieur se décompose en deux pointements triangulaires. Si l'on décompose de même le pointement inférieur, on trouve que les faces du pointement supérieur ont pour correspondantes, dans la même forme cristalline, les faces qui leur sont parallèles dans le pointement inférieur.

Si donc O représente le centre du cristal, OX, OY, OT, les moitiés positives des trois axes binaires de première espèce de l'Assemblage, le groupe des faces g, g, g du prisme hexaèdre régulier sera représenté par $\{0 1 \bar{1} 0\}$, le groupe formé par R et le rhomboèdre correspondant aura pour symbole $\{0 1 \bar{1} 1\}$, et le groupe formé par le rhomboèdre r', r', $\{1 0 \bar{1} 1\}$.

L'observation démontre que, s'il existe d'autres rhomboèdres de la forme $\{o g \bar{g} k\}$, ils ne s'associent que rarement à leurs conjugués $\{g o \bar{g} k\}$, ce qui fait voir que $\{o g \bar{g} k\}$ est une forme à six faces dans le quartz.

Puisque la forme $\{o g \bar{g} k\}$ se réduit au rhomboèdre représenté par 6B (*voyez* le tableau des formes, page 236), cherchons dans le Tableau n° IX quels sont les polyèdres moléculaires qui comportent ce genre de transformation. Nous obtenons alors les trois hypothèses indiquées par le tableau suivant :

SYMÉTRIE du polyèdre moléculaire.	$\{ghik\}$	$\{gg\overline{2gk}\}$	$\{ghio\}$	$\{11\bar{2}0\}$
A^3, o L^2, C, o P......	6 B	6 B	6 G	6 G
A^3, 3 L^2, o C, o P....	6 F	6 C	6 H	3 B
A^3, 3 L^2, C, 3 P^2.....	12 F	12 E	12 K	6 G

L'examen des formes $\{ghik\}$, $\{gg\overline{2gk}\}$, $\{ghio\}$, $\{11\bar{2}0\}$ va nous aider à faire un choix entre ces trois hypothèses.

La forme oblique $\{ghik\}$ est représentée dans le quartz par des formes à six faces trapézoïdes, telles que x, x (*fig.* 16), placées de manière à donner deux pointements triples non correspondants, rentrant dans la catégorie 6 F du tableau de la page 235.

La forme parallèle $\{gg\overline{2gk}\}$ n'est représentée dans la cristallisation du quartz que par les faces rhombes s, s. D'après M. Gustave Rose (*), ces faces, dont la notation est $\{11\bar{2}1\}$, sont toujours situées aux deux extrémités d'une même arête verticale, mais seulement pour trois de ces six arêtes, et en alternant. La figure résultant de leur réunion sera donc le ditrièdre 6 C. Lorsque cette loi d'alternance est en défaut, cela provient de ce que le cristal est maclé.

La forme $\{ghio\}$ a pour représentant dans le quartz un prisme hexaèdre irrégulier, mais symétrique, qui forme de petits biseaux sur chacun des côtés des trois arêtes verticales qui ne portent pas de faces s, s : sur notre figure, ces arêtes sont celles auxquelles aboutissent les extrémités positives de nos axes binaires de première espèce. La forme observée par M. Rose avait pour notation $\{6\bar{1}50\}$. Dans notre nomenclature générale des formes cristallines, ce prisme reçoit la notation 6 H.

Quant à la forme $\{11\bar{2}0\}$, elle ne paraît pas avoir jamais été observée dans les cristaux de quartz.

A ces divers caractères, on reconnaît que le symbole de la symétrie moléculaire est [A^3, 3 L^2, o C, o P]. Ainsi les axes binaires OX, OY, OT appartiennent au polyèdre moléculaire et sont des axes communs de la symétrie :

(*) *Poggendorff's Annalen*, tome LXII, page 331.

il est facile de voir qu'en effet toutes les faces sont coordonnées symétriquement par rapport à ces axes.

Quant à la question de savoir si ces lignes sont les axes de première espèce ou de deuxième espèce de l'Assemblage, nous l'avons résolue, dès l'origine, dans le premier de ces deux sens, à cause de la prédominance des formes $g = \{10\bar{1}0\}$, $R = \{01\bar{1}1\}$, $r' = \{10\bar{1}1\}$.

M. Miller a représenté par $\alpha\{ghk\}$ les formes hémiédriques du quartz.

J'ai supposé jusqu'ici que le quartz cristallisait dans le système sénaire; on aurait pu admettre qu'il appartient au système ternaire. Dans ce cas, OX, OY, OT sont les axes binaires d'espèce unique de l'Assemblage, et la considération des formes conduit encore au polyèdre $[A^3, 3L^2, 0C, 0P]$. La forme *xx*..., qui est tétartoédrique dans l'ancienne hypothèse, devient alors une forme hémiédrique du système ternaire: les formes RR..., $r'r'r'$..., et tous les rhomboèdres de premier et de deuxième ordres, deviennent holoédriques. Il n'existe pas de raison péremptoire pour préférer l'une ou l'autre de ces manières de voir : toutefois la cristallisation sénaire, que j'ai adoptée, rend un compte plus exact de la tendance du quartz à former des pointements sextuples, ainsi que certaines macles par hémitropie moléculaire, sur lesquelles je reviendrai dans la troisième partie de mon travail.

Pour former une molécule de quartz le plus simplement possible, en se conformant à la symétrie $[A^3, 3L^2, 0C, 0P]$, prenez une droite MM' (*fig.* 17) divisée au point X en deux segments égaux par sa plus courte distance OX à une droite fixe AOA'. Faites tourner OXMM' de 120 degrés autour de AA', de sorte que MM' vienne occuper la position NN', et OX le lieu OY; puis une seconde fois de 120 degrés, de sorte que MM' vienne occuper la position PP', et OX le lieu OT : les points M, M', N, N', P, P' seront les lieux des six atomes de la molécule; OX, OY, OT seront les axes binaires, et AA' l'axe ternaire du polyèdre moléculaire. Lorsque la molécule entre dans l'Assemblage sénaire, son centre de figure O vient coïncider avec l'un des Sommets de cet Assemblage, AA' avec son axe principal; enfin les droites OX, OY, OT viennent se ranger suivant ses axes binaires de première espèce. Cette construction rentre dans l'une des deux suppositions imaginées par

M. Delafosse (*) pour expliquer la dissymétrie de la cristallisation du quartz.

Polyèdre $[\Lambda^6, 0L^2, C, \Pi]$, *hémiaxie centrée principale.* — A ce groupe appartient l'apatite. On reconnaîtra ce genre de mériédrie, 1° à la forme $\{ghio\}$ qui perd la moitié de ses faces et se change en un prisme hexaèdre régulier placé irrégulièrement par rapport aux axes binaires de l'Assemblage; 2° à la forme $\{ghik\}$ qui se change en un birhomboèdre correspondant au prisme précédent. C'est l'hémiédrie à faces parallèles des minéralogistes allemands, et M. Miller l'a représentée par le symbole $\pi\{ghk\}$.

Les treize autres cas de mériédrie que comporte le système sénaire ne me paraissent pas avoir été jusqu'ici rencontrés dans la nature.

Système quaternaire.

Polyèdre $[\Lambda^4, 0L^2, C, \Pi]$, *hémiaxie centrée.* — Ce genre d'hémiédrie appartient aux substances suivantes :

Chaux tungstatée (schéelin calcaire),
Plomb tungstaté,
Plomb molybdaté (mélinose),
Fergusonite.

Dans sa *Cristallographie,* M. G. Rose y ajoute l'humboldtilite.

Ce groupe est caractérisé par l'hémiédrie des formes $\{gho\}$ et $\{ghk\}$: l'hémiédrie est à faces parallèles, et désignée par $\pi\{ghk\}$ dans la *Cristallographie* de M. Miller.

En général, dans le système quaternaire, l'hémiédrie à faces parallèles d'une forme oblique $\{ghk\}$ suffit pour indiquer l'hémiaxie centrée : car, dans tous les autres groupes mériédriques de ce système, l'hémiédrie est à faces inclinées.

Polyèdre $[\Lambda^2, 2L^2, 0C, 2P']$, *hémiaxie dichosymétrique de première espèce.* — D'après M. Frankenheim (**), l'édingtonite appartiendrait à ce groupe.

Polyèdre $[\Lambda^2, 2L'^2, 0C, 2P]$, *hémiaxie dichosymétrique de deuxième espèce.* — A ce groupe appartient la molécule du cuivre pyriteux.

(*) *Mémoires des Savants étrangers,* tome VIII, page 687.

(**) *Poggendorff's Annalen,* tome LXII, page 282.

Les formes hémiédriques qui le caractérisent sont {*gok*} et {*ghk*} : si l'hémiaxie était de première espèce, l'hémiédrie ne porterait plus sur la forme {*gok*}, mais sur la forme {*ggk*}.

La forme parallèle {101} est très-dominante dans le cuivre pyriteux, et donne un octaèdre à base carrée; elle y est très-souvent hémiédrique, et se change alors en un tétraèdre à quatre triangles isocèles, presque régulier.

Les quadratoctaèdres, placés sur les angles du noyau primitif (forme primitive d'Haüy) et de notation {*ggk*}, ne sont pas hémiédriques.

Les formes hémiédriques de l'hémiaxie dichosymétrique de première espèce sont représentées par le symbole $\varkappa$ {*ghk*}, et celles de la deuxième espèce par le symbole $\varkappa'$ {*ghk*}, dans la *Cristallographie* de M. Miller.

Polyèdre [Λ^4, $2L^2$, $2L'^2$, oC, oP], *holoaxie hémisymétrique.* — D'après M. Frankenheim (*), la wernérite devrait être rangée dans ce groupe.

Les autres formes mériédriques du système quaternaire n'ont pas encore été observées sur des substances cristallisées.

Système ternaire.

On ne connaît que deux sortes de mériédrie dans le système ternaire.

Polyèdre [Λ^3, oL^2, C, oP], *hémiaxie centrée.* — A ce groupe paraissent appartenir la craïtonite, et, d'après M. Frankenkeim, le cuivre dioptase (**).

Ce genre d'hémiédrie est caractérisé par cette circonstance, que toutes les formes {*ghik*}, {*go$\bar{g}$k*} non parallèles à l'axe ternaire sont des rhomboèdres, celles {*ghio*}, {$11\bar{2}0$} parallèles à cet axe, des prismes hexaèdres réguliers. On sait, en effet, que dans cette substance toutes les formes obliques sont des rhomboèdres de même axe principal, mais dont les axes secondaires sont placés irrégulièrement; les prismes sont à six pans et réguliers (***).

Si l'on supposait que la craïtonite et le dioptase cristallisent dans le système sénaire, ces espèces minérales appartiendraient à la *tétartoaxie centrée*, et les formes seraient tétartoédriques.

Polyèdre [Λ^3, oL^2, oC, $3P$], *hémiaxie dichosymétrique.* — Ce genre

(*) *Poggendorff's Annalen*, tome LXII, page 282.

(**) *Poggendorff's Annalen*, tome LXII, page 287.

(***) NAUMANN, *Elemente der Mineralogie*, pages 47 et 382.

de symétrie s'observe sur la tourmaline. On le reconnaîtra à ce signe que toutes les formes, sauf le prisme {11$\bar{2}$0}, sont hémiédriques.

Les deux sommets du cristal sont dissymétriques : les formes du pointement supérieur ne se répètent pas sur l'inférieur, et *vice versâ*. La forme normale {0001} est aussi hémiédrique, de sorte que l'un des sommets peut être tronqué horizontalement, sans que l'autre le soit.

L'hémiédrie de la tourmaline est à faces inclinées, et dénotée par le symbole $\varkappa$ {*ghk*} dans la *Cristallographie* de M. Miller.

Le type le plus simple à adopter pour son polyèdre moléculaire est un tétraèdre dont la base triéquiangle porterait à ses sommets trois atomes de même espèce, tandis que le quatrième atome serait également distant des trois précédents.

Système terbinaire.

Polyèdre [Λ^2, oL^2, oC, P, P′], *hémiaxie dichosymétrique.* — La topaze et la calamine possèdent ce genre de symétrie.

Les formes parallèles à l'axe Λ^2, savoir {*gh*0}, {100}, {010}, sont les seules qui soient holoédriques. Toutes les autres sont hémiédriques; il en résulte que les sommets opposés sont dissymétriques, et que les faces d'un sommet n'ont pas en général de faces qui leur correspondent vers le sommet opposé; cette circonstance s'est déjà rencontrée sur la tourmaline.

Cette hémiédrie est à faces inclinées; elle est désignée par le symbole σ {*ghk*}, dans la *Cristallographie* de M. Miller.

On peut prendre, comme type du polyèdre moléculaire, un triangle isocèle vertical, dont la base portera à ses extrémités deux atomes de même espèce, tandis que l'atome impair, d'autre espèce, en formera le sommet.

Polyèdre [Λ^2, L^2, L'^2, oC, oP], *holoaxie hémisymétrique.* — A ce groupe appartiennent la manganite, le sulfate de magnésie, celui de zinc, celui de nickel, etc., ainsi que l'oxalate neutre d'ammoniaque (*), les bitartrates d'ammoniaque, de soude, de potasse (**), l'asparagine, le glucosate de sel marin, et le formiate de strontiane (***). Il est probable que la

(*) La Provostaye, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, tome IV, page 455.

(**) Pasteur, *Annales de Chimie et de Physique*, tome XXIV, page 455.

(***) Pasteur, *Annales de Chimie et de Physique*, tome XXXI, page 67.

liste de ces sels hémiédriques est destinée à recevoir une plus grande extension par des observations ultérieures.

L'hémiédrie ne porte que sur les formes obliques {*ghk*} lesquelles, d'octaédrales, se changent en des sphénoïdes. M. Miller désigne ces formes à faces inclinées par le symbole *x* {*ghk*}.

Dans ces cristaux on retrouve à chaque sommet les faces du sommet opposé, mais disposées dans un ordre inverse. Comme les trois axes binaires de l'Assemblage existent aussi dans le polyèdre moléculaire, un quelconque de ces trois axes peut être à volonté choisi pour axe principal, et placé dans une situation verticale. La même indécision existe pour les cristaux terbinaires holoédriques.

Le polyèdre moléculaire le plus simple à imaginer, dans le mode de symétrie actuel, consiste en quatre atomes de même espèce dont le lieu se déterminera de la manière suivante. Soit une droite MM′ (*fig.* 18), divisée au point X en deux segments égaux par sa plus courte distance OX à une droite fixe AOA′ : faites tourner OXMM′ de 180 degrés autour de AA′, de sorte que MM′ vienne en NN′ et OX en OX_1. Les points M, M′, N, N′ seront les lieux des quatre atomes de la molécule, et formeront un tétraèdre à quatre triangles égaux, ou sphénoïde, dont les trois axes binaires seront AOA′, XOX_1, et la droite menée par O normalement au plan de ces deux dernières. Lorsque la molécule entre dans l'Assemblage cristallin, ces trois axes viennent coïncider avec les trois axes binaires de cet Assemblage.

Ce mode de génération a beaucoup d'analogie avec celui que nous avons décrit, page 242, pour la molécule du quartz.

Système binaire.

Polyèdre [Λ^2, oC, oP], *holoaxie hémisymétrique.* — Dans ce groupe viennent se ranger un assez grand nombre de substances organiques :

Acide tartrique,
Sucre cristallisé,
Tartrate neutre d'ammoniaque (*),
Tartrate neutre de potasse,

(*) Pasteur, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, tome XXIV, page 444.

Tartrate double de potasse et d'ammoniaque,
Tartrate double de soude et d'ammoniaque,
Tartrate double de soude et de potasse,

et probablement plusieurs autres sels ou acides végétaux.

Ce genre d'hémiédrie se reconnaîtra à la dissymétrie des sommets. Les formes {*ghi* o} parallèles à l'axe A^2 restent holoédriques; mais tout le système des faces situées à l'une des extrémités de l'axe de cette zone peut différer du système des faces situées à l'autre extrémité; la troncature supérieure {0001} peut ne pas se reproduire sur le sommet inférieur. Ces formes hémiédriques reçoivent la notation symbolique σ {*ghk*} dans la *Cristallographie* de M. Miller.

Le type moléculaire le plus simple est quadriatomique : on peut employer le mode de génération de la page précédente, pourvu que M et M′ (*fig.* 18) soient des atomes d'espèces différentes ou inégalement distants de X; la droite AA′ est alors le seul axe de symétrie du tétraèdre ainsi obtenu.

Système asymétrique.

L'hémiédrie, dans le système asymétrique, consistera en ce que les faces seront en général non accompagnées de leurs parallèles; il faut toutefois que la disparition de ces faces parallèles ne puisse être regardée comme un avortement accidentel. Je ne connais aucune observation d'où l'on puisse conclure que le polyèdre moléculaire [o L, o C, o P] se rencontre dans les substances cristallisées. Quelques minéralogistes (*) pensent que l'axinite appartient à ce groupe; mais cette opinion paraît principalement fondée sur les propriétés pyroélectriques de cette substance.

(*) Frankenheim, *Poggendorff's Annalen*, tome LVI, page 178.

TROISIÈME PARTIE (*).

DES MACLES ET DES HÉMITROPIES.

§ I. — *Des cristaux maclés par hémitropie moléculaire.*

Concevons que des molécules de même espèce viennent à se grouper régulièrement et à cristalliser dans un système déterminé; construisons l'Assemblage géométrique des lignes qui réunissent les centres de gravité de ces molécules, et par un de ses Sommets que je nommerai Σ, menons les axes et plans de symétrie de l'Assemblage, formant un système provisoirement fixe, et que je représenterai par A.

La molécule dont le centre vient se fixer en Σ possède certains éléments de symétrie S_c qui lui sont communs avec l'Assemblage; mais, si le cristal est mériédrique, il existe d'autres éléments, dénotés par le symbole S_a, et qui appartiennent uniquement à l'Assemblage.

Une fois le centre de la molécule fixé en Σ, elle tournera autour de ce point jusqu'à ce que ses éléments de symétrie S_c viennent coïncider avec les éléments homologues dans l'Assemblage cristallin. Demandons-nous si cette superposition ne peut s'effectuer que d'une seule manière, ou s'il existe deux ou plusieurs modes de coïncidence réellement distincts, c'est-à-dire tels que les lieux des sommets du polyèdre moléculaire autour du centre Σ soient différents.

Pour le découvrir, fixons ce polyèdre dans une première position que je nommerai p, et qui réalise les conditions de coïncidence que nous venons d'indiquer. Puis, laissant ce polyèdre immobile, faisons tourner l'Assemblage autour de Σ, en lui donnant successivement toutes les rotations qui le ramènent en coïncidence avec lui-même, et soit A' l'une des nouvelles positions ainsi obtenues. Dans ce passage de A en A', les molécules sont restées invariables dans leurs positions, et ainsi l'équilibre moléculaire subsiste après comme avant. Ramenons maintenant l'Assemblage à sa première position par une rotation inverse autour de Σ, rotation à laquelle participeront, cette fois, tous les

(*) Communiquée à la Société Philomathique, le 8 juin 1850.

polyèdres moléculaires supposés maintenant liés avec l'Assemblage. Après que cette rotation aura été effectuée, l'équilibre moléculaire n'aura pas cessé d'exister, les centres des molécules recoïncideront avec les Sommets de l'Assemblage qui aura repris sa position initiale A ; mais chaque polyèdre moléculaire, et, en particulier, celui dont le centre est en Σ aura, par rapport à l'espace absolu, une nouvelle position p' : il s'agit de savoir si elle est distincte de la position p.

L'axe L^q autour duquel ont eu lieu les deux rotations successives et inverses de l'Assemblage appartient nécessairement à la symétrie de cet Assemblage, qui se dénote au moyen du symbole $[S_c, S_a]$.

Si cet axe est un des éléments de la symétrie S_c, cela veut dire qu'il est aussi un axe d'ordre q pour le polyèdre moléculaire ; donc une rotation égale à $\frac{360^\circ}{q}$ ou à l'un des multiples de cet arc ramènera les sommets du polyèdre à leurs mêmes lieux apparents ; donc alors les deux polyèdres p et p' se superposeront, et l'on n'aura point obtenu un nouveau mode de coïncidence du polyèdre relativement aux axes et plans de l'Assemblage fixe.

Si au contraire l'axe L^q est un des éléments de la symétrie S_a, un de ces axes que nous avons nommés « axes déficients » de l'Assemblage, il n'appartiendra plus à la symétrie du polyèdre moléculaire ; d'où il résulte que, lorsqu'on ramènera l'Assemblage dans sa première position, de A' en A, le polyèdre, ayant tourné autour d'une droite étrangère à sa symétrie, n'occupera plus le même lieu dans l'espace. De là résulte ce théorème :

Pour obtenir les diverses manières dont le polyèdre moléculaire peut venir se ranger par rapport aux axes de l'Assemblage, on doit, en partant de l'une des positions possibles de ce polyèdre, le faire tourner successivement autour des axes déficients de l'Assemblage.

Toutefois il importe de remarquer que plusieurs des solutions ainsi obtenues peuvent rentrer les unes dans les autres. Pour découvrir celles qui sont essentiellement distinctes, nous raisonnerons de la manière suivante :

Soit s un sommet quelconque du polyèdre moléculaire, et soient $s', s'', \ldots$ ses homologues par rapport aux éléments de symétrie S_c : on peut toujours considérer ces sommets comme étant les pôles d'une certaine forme mériédrique $\mu\{ghk\}$ correspondant au polyèdre donné ; les caractéristiques g, h, k étant

choisies de manière que le pôle de (ghk) coïncide avec s, les pôles des autres faces identiques à (ghk) coïncideront avec s', s'',..., le mode de dérivation étant le même de part et d'autre. Or toutes les fois que l'on fait tourner de 180 degrés la forme $\mu\{ghk\}$ autour de l'un des axes binaires déficients de l'Assemblage, on obtient l'une des formes conjuguées de $\mu\{ghk\}$ (*voyez* ci-dessus, page 220) : les pôles de cette forme représentent les positions prises dans l'espace par le système des sommets s, s', s'',... après la demi-révolution du polyèdre p autour de l'axe binaire. Ce qui vient d'être dit relativement à un seul système de sommets homologues dans le polyèdre p s'appliquerait de même à tous les autres systèmes de sommets homologues que pourrait posséder le polyèdre p. D'où l'on voit qu'à chaque forme conjuguée correspond une position distincte du polyèdre p, et, par suite, l'on peut énoncer le théorème suivant :

Le nombre de positions essentiellement distinctes que peut prendre le polyèdre moléculaire par rapport à l'Assemblage, sans en troubler la structure et l'équilibre, est égal à l'unité augmentée du nombre des formes conjuguées que possède une forme oblique quelconque $\mu\{ghk\}$ *correspondant à la symétrie de ce polyèdre.*

Si le polyèdre est holoaxe, il ne pourra prendre que la position unique p.

Si le polyèdre est hémiaxe, il sera susceptible de deux positions distinctes p, p'.

Enfin les polyèdres tétartoaxes pourront se ranger, par rapport à l'Assemblage, de quatre manières différentes, suivant les positions p, p', p'', p'''.

Ce dernier cas ne peut d'ailleurs se présenter que pour le polyèdre moléculaire de la forme $[\Lambda^3, 0L^2, 0C, 0P$ ou Π ou $3P]$ cristallisant dans le système sénaire.

En faisant tourner un tel polyèdre de 180 degrés autour de l'axe principal de l'Assemblage, on l'amènera dans la position p'.

En le faisant tourner de 180 degrés autour de l'un des axes $3L^2$ de l'Assemblage, on le fera passer à la position p''.

Enfin en le faisant tourner de 180 degrés autour de l'un des axes $3L'^2$, il viendra prendre la position p'''.

Je mentionne ces résultats à un point de vue purement théorique ; car aucune cristallisation tétartoaxe n'a encore été observée dans la nature, à

moins que l'on ne veuille supposer que la tourmaline ou la craïtonite appartiennent au système sénaire. Ainsi, je me bornerai à examiner le cas des polyèdres hémiaxes, lesquels peuvent s'orienter de deux manières distinctes par rapport aux Sommets fixes de l'Assemblage.

Concevons que, dans toute la partie droite d'un cristal hémiaxe, les molécules aient pris la position p : dans toute cette étendue, les lignes homologues des molécules sont parallèles entre elles. Concevons de plus que, dans toute la partie gauche, les molécules aient adopté la position p' : les lignes homologues des molécules, dans cette partie du cristal, auront cessé d'être parallèles aux lignes homologues des molécules situées dans l'autre partie ; en d'autres termes, une molécule du système p transportée parallèlement à elle-même, et centre sur centre, sur une molécule du système p', ne coïncidera point avec elle, sommets sur sommets : les conditions de constitution générale des corps régulièrement cristallisés se trouveront donc ici en défaut, et l'on devra regarder cette association des deux systèmes de molécules p et p' comme formant deux cristaux distincts qui se sont pénétrés mutuellement.

Ce qu'il importe de remarquer, c'est que, dans une telle macle, tous les axes et plans de symétrie de l'Assemblage, et en général toutes les lignes cristallographiques courent sans interruption d'une extrémité du cristal à l'autre.

Je désigne un tel phénomène sous le nom de *macle par hémitropie moléculaire,* qui n'est que la traduction exacte des faits qui se sont produits dans l'intérieur du cristal ; le terme d'*hémitropie* est justifié par cette circonstance, que le polyèdre de position p' peut toujours être considéré comme provenant d'une rotation de 180 degrés du polyèdre p autour d'un axe convenablement choisi de l'Assemblage : cela résulte de cette remarque générale, déjà faite dans la note de la page 219, qu'il existe toujours des axes binaires dans la symétrie déficiente d'un polyèdre moléculaire non holoaxe.

On reconnaîtra aux signes suivants le genre de pénétration mutuelle que nous venons d'indiquer. Soit $\mu\{ghk\}$ une forme mériédrique qui se montre dans la partie du cristal où se trouvent les polyèdres moléculaires de position p : sa forme conjuguée $\mu'\{ghk\}$ devra se produire dans la partie opposée du cristal, puisque cette forme dérive de $\mu\{ghk\}$ par la même rotation de 180 degrés qui amène p dans la position p'. Les deux formes hémiaxes conjuguées $\mu\{ghk\}$, $\mu'\{ghk\}$ qui recouvrent, l'une le flanc droit,

l'autre le flanc gauche du cristal, seront parallèles aux faces alternatives de la forme holoaxe $\{ghk\}$, comme si la partie gauche du cristal avait été dérivée de sa partie droite par une rotation de 180 degrés autour de l'un des axes binaires déficients du système.

Voyons maintenant si les observations consignées dans les Traités ou Mémoires de cristallographie mentionnent de telles pénétrations de cristaux.

Polyèdre $[3L^2, 4L^3, C, 3P^2]$. — La symétrie déficiente de ce polyèdre est exprimée par $[3L^{2\,2}, 6L'^2, 6P]$; d'où l'on voit que le polyèdre primitif p donne le polyèdre p',

Soit par une rotation de 90 degrés autour de l'un des trois axes quaternaires de l'Assemblage;

Soit par une rotation de 180 degrés autour de l'un de ses six axes binaires;

Soit enfin en se reproduisant symétriquement par rapport à l'un des plans 6P. De ces trois modes de dérivation, nous nous bornerons à conserver le mode de dérivation par hémitropie, qui suffit à l'explication du phénomène.

Lorsque deux cristaux de cette nature se maclent ainsi par hémitropie moléculaire, les deux hémitétrakishexaèdres de même espèce qui caractérisent l'hémiédrie des deux cristaux emboîtés sont parallèles aux faces alternatives de la forme holoédrique $\{gho\}$. Ce cas se présente quelquefois dans la pyrite de fer (voyez *Cristallographie* de Miller, n° 240), et j'en ai eu moi-même des exemples sous les yeux.

Polyèdre $[3L^2, 4L^2, 0C, 6P]$. — La symétrie déficiente est exprimée par le symbole $[3L^{2\cdot 2}, 6L^2, C, 3P^2]$; d'où l'on voit que le polyèdre de position p' peut dériver du polyèdre de position p,

Soit par une rotation de 90 degrés autour de l'un des axes quaternaires de l'Assemblage;

Soit par une rotation de 180 degrés autour de l'un de ses six axes binaires;

Soit en se reproduisant inversement par rapport au centre C;

Soit enfin par reproduction symétrique relativement à l'un des trois plans $3P^2$. Nous nous bornerons au mode de génération hémitropique.

Lorsqu'un tel cristal éprouve l'hémitropie moléculaire, les formes hémiaxes dichosymétriques (tétraèdre, triakistétraèdre, etc.) se juxtaposent de manière à offrir des faces parallèles deux à deux.

M. Miller cite un tel exemple emprunté à un cristal de diamant (voyez *Cristallographie*, n° 239). On peut voir aussi de tels cristaux de cuivre gris figurés par M. Dufrénoy (Atlas de Minéralogie, *Pl.* CXXIV, *fig.* 442).

Polyèdre [Λ^3, $3L^2$, $0C$, $0P$]. — Les axes déficients de ce polyèdre sont représentés par le symbole [$\Lambda^{2\,3}$, $3L'^2$]; d'où l'on voit que l'on peut faire dériver le polyèdre p' du polyèdre p,

Soit par une rotation de 60 ou de 180 degrés autour de l'axe principal;

Soit par une rotation de 180 degrés autour de l'un des axes L'^2. De ces trois modes de dérivation, le plus simple est la demi-rotation autour de l'axe ternaire du polyèdre moléculaire.

Ce genre d'hémitropie est assez fréquent dans le quartz, et notamment sur les quartz maclés de Jéricksau (*), où l'une des moitiés du cristal paraît en effet avoir tourné de 180 degrés autour de l'axe principal pour venir coïncider avec l'autre moitié.

Pour mieux faire comprendre la nature d'une telle hémitropie, j'ai construit le dessin (*fig.* 19) qui représente un plan réticulaire de l'Assemblage des molécules du quartz, mené normalement à son axe principal. A droite de la ligne brisée $\alpha\beta\gamma\delta$, toutes les molécules sont censées placées dans la position p; des six atomes de la molécule supposée hexatomique (*voyez* ci-dessus, page 242), les trois situés au-dessous du plan du dessin sont figurés par les pointes des flèches, les trois autres situés au-dessus du même plan sont censés placés aux extrémités opposées. Dans toute la partie située à gauche de $\alpha\beta\gamma\delta$, les molécules sont tournées dans la position p'. Les Rangées qui forment comme les fils du Réseau sont représentées par trois systèmes de droites se coupant sous l'angle de 60 degrés en chacun des Sommets du Réseau. Dans toute la partie p du système, ces lignes sont figurées pleines; au delà, dans la partie p', elles deviennent pointillées; il importe de remarquer que ces Rangées n'éprouvent d'ailleurs aucune interruption, malgré l'hémitropie des molécules situées au delà de $\alpha\beta\gamma\delta$. Il est facile de voir qu'il en est de même pour les Rangées non situées dans le plan de la figure, et qui traversent obliquement ce plan dans une direction ascendante ou descendante. On remarquera aussi que la ligne $\alpha\beta\gamma\delta$ peut être quelconque; cependant, si

(*) GUSTAVE ROSE, dans les *Poggendorff's Annalen*, tome LXII, page 333.

l'on tient compte de cette circonstance, que l'accroissement du cristal se fait surtout par séries parallèles aux trois côtés de la maille triangulaire du Réseau, il y aura lieu de penser que le plus souvent cette droite se décomposera en tronçons successifs parallèles à ces côtés.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que la molécule du quartz cristallisait dans le système sénaire; l'opinion contraire, savoir, que le noyau du quartz est un rhomboèdre, ayant prévalu en général auprès des physiciens, voyons si la même explication peut s'appliquer à l'hypothèse d'une cristallisation ternaire. Suivant cette manière de voir, le quartz devient un cristal holoaxe, et l'hémitropie moléculaire ne peut plus avoir lieu sans amener la discontinuité des Rangées de l'Assemblage, à partir de la surface de séparation qui laisse d'un côté les molécules de position p, de l'autre celles de position p'; à la vérité, cette discontinuité ne porterait pas sur les Rangées situées dans le plan normal à l'axe principal, mais elle aurait lieu pour toutes les Rangées obliques à ce plan.

Or il me paraît bien probable que, dans les macles du quartz, les Rangées se continuent sans interruption à travers les deux cristaux emboîtés; leur soudure est tellement intime, il y a si peu de tendance au clivage ou au miroitement suivant le joint qui les réunit, l'analogie de structure avec les macles des autres cristaux hémiaxes, et avec les macles par inversion dont je parlerai bientôt est si grande, que je n'hésite pas à ranger le quartz parmi les cristaux hémiaxes du système sénaire (*).

Les résultats des expériences de Savart sur le quartz s'expliquent d'ailleurs d'une manière très-satisfaisante, dans cette manière de voir, par la considération de l'hémiaxie de son polyèdre moléculaire.

Polyèdre $[\Lambda^6, 0L^2, C, \Pi]$. — Les axes déficients d'un tel polyèdre sont représentés par le symbole $[3L^2, 3L'^2]$; d'où l'on voit que le polyèdre de position p' dérive du polyèdre de position p,

Par une rotation de 180 degrés autour de l'un quelconque des six axes binaires de l'Assemblage. Lorsqu'un tel cristal se macle avec lui-même par hémitropie moléculaire, l'une des moitiés paraît provenir de l'autre par une rotation de 180 degrés autour de l'un quelconque de ces axes binaires.

(*) L'ordre de prédominance des faces est d'ailleurs conforme à ce résultat.

Je ne connais pas d'exemple d'une telle hémitropie, mais il est probable que l'on pourra l'observer, par exemple, sur des cristaux d'apatite.

Polyèdre $[\Lambda^4, 0L^2, C, \Pi]$. — Les axes déficients d'un tel polyèdre sont représentés par le symbole $[2L^2, 2L'^2]$; d'où l'on voit que l'on peut faire dériver le polyèdre p' du polyèdre p,

Au moyen d'une rotation de 180 degrés effectuée autour de l'un quelconque des quatre axes binaires de l'Assemblage quaternaire.

La seconde moitié du cristal paraît alors coïncider avec la position que prendrait la première moitié après avoir tourné de 180 degrés autour d'une droite normale à l'une des faces (100), (010), (110), $(1\bar{1}0)$. Ce genre d'hémitropie se rencontre quelquefois dans le schéelin calcaire (*voyez* MILLER, *Cristallographie*, n° 246).

Polyèdre $[\Lambda^2, 2L'^2, 0C, 2P]$. — Les axes déficients de ce polyèdre sont représentés par le symbole $[\Lambda^{2\cdot 2}, 2L^2]$; d'où l'on conclura que le polyèdre p' dérive du polyèdre p, de deux manières distinctes,

Soit par une rotation de 90 degrés dans un sens ou dans l'autre autour de l'axe principal;

Soit par une rotation de 180 degrés autour de l'un des deux axes binaires de première espèce, c'est-à-dire autour de l'un des deux axes déficients de l'Assemblage.

Le cuivre pyriteux offre des exemples de ce genre d'hémitropie. La seconde moitié du cristal paraît être identique avec la première moitié qui aurait tourné de 180 degrés autour d'un axe normal aux faces de celui des deux prismes à base carrée qui est couronné par des pointements hémiédriques, c'est-à-dire autour d'un axe normal à la face (100) ou à la face (010) (voyez *Cristallographie* de Miller, n° 245).

Polyèdres $[\Lambda^3, 0L^2, C, 0P]$ et $[\Lambda^3, 0L^2, 0C, 3P]$. — Ces polyèdres représentent les molécules de la craïtonite et de la tourmaline (*voyez* page 245). Comme nous avons admis que ces substances cristallisaient dans le système ternaire, leur symétrie déficiente, en ce qui concerne les axes, sera représentée par $[3L^2]$: d'où l'on voit que le polyèdre de position p passera à la position p', par une rotation de 180 degrés autour de l'un quelconque des trois axes binaires de l'Assemblage.

Je ne connais pas d'exemple d'une telle hémitropie; mais il est probable qu'elle se rencontrera sur la tourmaline.

Polyèdre [A^2, oL^2, oC, P, P']. — Les axes déficients de ce polyèdre ont pour symbole [L^2, L'^2]; d'où l'on voit que l'on fera passer le polyèdre p à la position p', en le faisant tourner de 180 degrés autour de l'un des deux axes déficients de l'Assemblage.

On peut alors considérer la seconde moitié du cristal maclé comme dérivant de la première par une demi-révolution autour de l'un de ces deux axes. M. Dufrénoy (*) cite un cristal maclé de calamine dont la symétrie est précisément celle que nous venons d'indiquer.

Les cristaux ayant pour polyèdre moléculaire [A^2, L^2, L'^2, oC, oP] ou [A^2, oC, oP] sont holoaxes, et ne peuvent offrir de macle par hémitropie moléculaire.

La théorie que nous venons de développer rend donc un compte satisfaisant de ces divers faits d'hémitropie, dont l'interprétation était restée incertaine pour les minéralogistes.

§ II. — *Des cristaux maclés par inversion moléculaire.*

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, comment on pouvait, sur le même Assemblage cristallin, disposer de deux manières différentes (lorsque le polyèdre moléculaire est hémiaxe) les molécules de la substance cristallisante, sans altérer les conditions d'équilibre, mais en employant toujours dans ce but *les mêmes molécules*.

On peut encore, dans certains cas, obtenir une double solution pour l'équilibre moléculaire, en conservant le même Assemblage, mais en prenant, cette fois, d'autres molécules non superposables aux premières et qui, cependant, pourront être regardées comme identiques avec elles.

Soit p le polyèdre moléculaire, et soit π son polyèdre *inverse*, obtenu en joignant chaque sommet ou atome de p avec le centre de gravité du polyèdre, et prolongeant la droite de jonction d'une quantité égale à elle-même; tantôt on pourra passer de p à π par des rotations convenablement

(*) *Traité de Minéralogie*, tome II, page 607.

effectuées, et alors la molécule p et la molécule π ne seront que la même molécule différemment orientée ; tantôt au contraire on ne pourra transformer p en π par aucune sorte de rotation, et alors les molécules p et π seront essentiellement distinctes, quoique cependant la disposition des atomes soit identique de part et d'autre.

Le premier cas se réalisera toutes les fois que le polyèdre p sera du genre de ceux que nous avons appelés « centrés », ou « dichosymétriques » ; car alors il possédera soit un centre, soit un plan de symétrie, et par conséquent il sera toujours susceptible de coïncider avec son inverse.

Le second cas se réalisera toutes les fois que le polyèdre p sera hémisymétrique.

Dans les cristaux holoaxes hémisymétriques, à la position p correspond évidemment une seule position de l'inverse π.

Dans les cristaux hémiaxes hémisymétriques, aux positions p, p' correspondent les deux positions π, π' de la molécule inverse.

De même dans les cristaux tétartoaxes hémisymétriques, aux positions p, p', p'', p''' du polyèdre primitif ou direct correspondraient les positions π, π', π'', π''' du polyèdre inverse.

Concevons maintenant que toute la partie droite d'un cristal hémisymétrique soit formée avec des molécules de forme p, et que toute la partie gauche soit formée avec des molécules inverses et de forme π ; concevons en outre que π dérive de p par une génération inverse, obtenue au moyen d'un centre C, ou d'un plan de symétrie P. Si l'on compare dans les deux demi-cristaux accolés les parties homologues relativement à ce centre ou à ce plan, on verra que les lignes homologues des deux moitiés de l'Assemblage sont disposées inversement par rapport à ce centre ou à ce plan, attendu que ce centre ou ce plan font partie des éléments de symétrie de l'Assemblage ; les lignes homologues des molécules p et π satisfont, par construction, à la même condition ; donc l'équilibre sera le même dans chaque moitié. D'où l'on conçoit la possibilité d'une juxtaposition de deux cristaux à molécules p et à molécules π, tellement intime que les Rangées de l'un des cristaux soient l'exacte continuation de celles de l'autre, tous les axes et plans de symétrie traversant le double cristal sans interruption, et l'Assemblage reparaissant unique dès qu'on réduit par la pensée toutes ses molécules à leurs centres.

On peut désigner ce genre particulier d'emboîtement sous le nom de *macle par inversion moléculaire*, pour le distinguer de la macle par hémitropie moléculaire; la pénétration mutuelle des deux cristaux n'est pas moins intime dans l'un de ces deux cas que dans l'autre.

Il y a cependant entre eux une différence physique fort importante à noter; la macle par inversion ne pourra se produire qu'à la condition que le milieu cristallisateur contienne les polyèdres moléculaires des deux sortes, directe et inverse : si une seule de ces sortes existe dans les eaux mères, la macle par inversion sera impossible; si au contraire les deux sortes existent simultanément, et à peu près par égales quantités, la macle par inversion pourra se produire sur la majeure partie des cristaux formés.

Les cristaux hémisymétriques actuellement connus appartiennent à trois sortes de polyèdres moléculaires que nous allons successivement considérer, au point de vue que nous venons d'indiquer.

Polyèdre [Λ^3, $3L^2$, oC, oP]. — C'est le polyèdre de la molécule du quartz. Outre son inverse propre π, que l'on peut faire dériver de p au moyen des éléments déficients [C, II], il offre l'inverse π' de son polyèdre conjugué p', que l'on peut aussi faire dériver de p au moyen des éléments déficients [3P, 3P']. Par exemple, si l'on se reporte à la *fig.* 17 où MNPM'N'P' représente le polyèdre primitif p, et si, après avoir construit la droite mXm' symétrique de MXM' par rapport au plan AOX qui est l'un des plans 3P', on la fait tourner de 120 et de 240 degrés autour de AOA', les extrémités m, m' auront décrit l'un des deux inverses, à savoir l'inverse π' du polyèdre p, et en le faisant tourner de 180 degrés autour de AOA', on obtiendra l'autre inverse π du même polyèdre.

Lorsque deux cristaux de quartz, l'un à molécules de forme p, l'autre à molécules de forme π, viennent à se pénétrer, alors, si dans la première moitié on observe la disposition relative des faces indiquée par la *fig.* 16, on observera dans la deuxième moitié une disposition renversée, en ce sens que l'on retrouvera les mêmes faces et dans le même ordre, pourvu qu'au lieu de tourner autour de l'axe principal dans le sens XYT, on marche dans le sens XTY, en faisant le tour du cristal. Dans l'un des cas, la face plagièdre supérieure x sera située sur la gauche de l'arête verticale à laquelle elle aboutit; dans l'autre cas elle sera située sur sa droite.

C'est d'après cette différence de disposition que M. G. Rose a été conduit à diviser les quartz en *quartz à gauche* et *quartz à droite*.

Ces deux genres de quartz, en se réunissant, produisent une macle par inversion. La polarisation de la lumière fournit, pour étudier de telles macles, des appareils extrêmement sensibles, au moyen desquels on a reconnu que les surfaces de séparation des deux cristaux groupés consistent en des endentements de plans, qui ont une tendance marquée à être parallèles aux faces des pointements sextuples les plus habituels. Le cristal de quartz de la *fig.* 16 est un quartz à gauche, quartz lévogyre des physiciens.

La macle par inversion paraît être encore plus fréquente dans le quartz que la macle par hémitropie; c'est, du reste, le seul cristal connu qui puisse offrir ces deux genres de macles, étant à la fois hémiaxe et hémisymétrique.

Polyèdres $[A^2, L^2, L'^2, oC, oP]$ *et* $[A^2, oC, oP]$. — Les macles par inversion des cristaux appartenant à ces deux groupes ont encore été peu étudiées jusqu'ici.

Dans certains cas, la macle ne pourra se produire, attendu que les atomes de la molécule paraissent se disposer constamment de la même manière; c'est ce qui a lieu notamment pour le sucre cristallisé, dont l'hémiédrie offre toujours le même caractère, et sur lequel l'arrangement inverse des faces hémiédriques ne se présente jamais.

Dans d'autres cas, les molécules des deux sortes existent mélangées dans les eaux mères; mais l'acte de la cristallisation disjoint ces molécules avec énergie, de sorte que les unes vont d'un côté former des cristaux d'une certaine espèce, les autres, de l'autre, former des cristaux de l'espèce inverse. Ce fait curieux a été signalé par M. Pasteur, dans la cristallisation de l'acide paratartrique (*).

§ III. — *De l'hémitropie réticulaire.*

L'hémitropie que je nomme *réticulaire*, pour indiquer que c'est l'Assemblage entier avec ses Réseaux et ses polyèdres moléculaires qui tourne de

(*) Il n'est pas non plus impossible que l'acte de la cristallisation réagisse sur la structure moléculaire en la modifiant; certains faits optiques relatifs au quartz, et les observations toutes récentes de M. Pasteur sur le formiate de strontiane, tendraient à faire adopter cette manière de voir.

180 degrés, et non plus simplement la molécule, consiste dans l'accolement de deux cristaux de même espèce, suivant deux de leurs faces planes.

Il n'y a plus ici de pénétration avec endentement des parties, comme dans les cas précédemment examinés; c'est une juxtaposition avec soudure : les axes et lignes homologues des deux Assemblages ainsi rapprochés ne sont plus les prolongements les uns des autres. Toutefois la juxtaposition ne peut se faire, en général, qu'à la condition que les faces venant au contact soient semblables, c'est-à-dire appartiennent à une forme de même désignation; en outre, il faut que les Réseaux des deux faces coïncident, Sommets sur Sommets.

Lorsque les deux plans réticulaires sont ainsi mis en coïncidence, il est clair que l'on peut toujours obtenir un second mode de coïncidence de leurs Réseaux en renversant l'un des Assemblages, par une rotation de 180 degrés autour d'une droite normale au plan de jonction et passant par l'un des Sommets communs aux deux Réseaux superposés.

Si de l'un de ces modes de coïncidence des deux Réseaux il résulte que les deux Assemblages soient le prolongement l'un de l'autre, l'autre mode rendra ces deux Assemblages géométriquement symétriques entre eux, par rapport au plan de jonction; et réciproquement, si l'on débute par le cas des Assemblages symétriques, le retournement de 180 degrés de l'un d'eux leur donnera une orientation identique, de manière à figurer les deux moitiés d'un Assemblage unique.

Lorsque le plan servant de base commune aux deux cristaux est un plan de symétrie de l'Assemblage, alors les deux modes de superposition produisent le même résultat final, savoir, que les deux Assemblages paraissent la continuation l'un de l'autre.

Lorsque les deux cristaux se placent dans la position symétrique, par rapport à la base commune, on dit qu'il y a *hémitropie*, et nous avons ajouté *réticulaire*, pour éviter toute confusion.

Le plan ABCDEG (*fig.* 20), auquel viennent s'arrêter les Rangées parallèles *a*A, *b*B, *c*C, *d*D,... a reçu le nom de *plan d'hémitropie*. La normale à ce plan menée par un des Sommets A, B, C, D,... a reçu le nom *d'axe d'hémitropie :* en général, cette droite n'est ni un axe de symétrie, ni même une simple Rangée moléculaire. On pourrait, à cause de cela, supprimer la

considération de ces axes d'hémitropie; il n'en résulterait pas grand inconvénient pour l'exposition des faits.

Maintenant, à partir de A, B, C, D,..., menons les droites Aa', Bb', Cc',... symétriques de Aa, Bb, Cc,...; il est clair que sur ces nouvelles Rangées nous pourrons construire un Assemblage géométriquement symétrique au précédent, et dont les conditions d'équilibre seront identiques à celles de l'Assemblage primitif.

Haüy a fait la remarque fort juste que l'on pouvait représenter géométriquement ce phénomène, en supposant que l'une des moitiés de l'Assemblage tourne de 180 degrés autour de l'axe d'hémitropie; mais il est clair que c'est là un mouvement purement fictif, et que la coordination moléculaire se fait symétriquement par rapport au plan d'hémitropie.

Dans la nature, les deux Réseaux superposés portent des molécules en chacun de leurs Sommets, de sorte que la coïncidence rigoureuse n'est pas possible : les deux Réseaux, celui qui limite vers le haut le cristal inférieur, et celui qui sert de base inférieure au cristal supérieur, se placent parallèlement l'un à l'autre, les Sommets en regard, et à une distance que déterminent les conditions d'attraction mutuelle : dans l'un des Réseaux, les molécules ont l'orientation propre à celles de leur Assemblage; dans l'autre, celle propre aux molécules de l'autre Assemblage.

Il résulte de ce qui a été dit ci-dessus que le plan d'hémitropie peut être une face quelconque du cristal; mais comme l'explication du phénomène suppose que le plan d'hémitropie a existé comme face-limite à une époque quelconque de la cristallisation, et comme la chance d'être face-limite est loin d'être la même pour tous les plans réticulaires et dépend de la densité de leur tissu, il s'ensuit que le plan d'hémitropie sera presque toujours une face de notation simple, appartenant à une forme normale, ou à une forme parallèle, rarement à une forme oblique. Je vais examiner successivement ces trois cas.

Plan d'hémitropie appartenant à une forme normale. — Si le plan d'hémitropie est normal à un axe d'ordre pair, il est parallèle à un plan de symétrie de l'Assemblage, et alors les deux cristaux, nous l'avons déjà dit, peuvent être considérés comme un cristal unique, les Rangées moléculaires passant de l'un à l'autre sans interruption. Dans ce cas, il ne peut se produire qu'une hémitropie moléculaire, ce qui arrivera si la molécule est

hémiaxe. Toutefois, même dans le cas de l'holoaxie, l'accolement pourra se manifester au dehors par des angles dièdres rentrants, adossés au pourtour de la face servant de plan d'hémitropie. C'est ce qui a lieu entre autres dans les groupements réguliers de cristaux de cuivre natif, lesquels s'accolent deux à deux, suivant les faces du dodécaèdre rhomboïdal, normales, comme l'on sait, aux six axes binaires du système. Les groupements des cristaux de neige paraissent se faire suivant une loi analogue. L'accolement pourra aussi se reconnaître à des lignes fines ou striées, telles que celles que l'on observe dans les hémitropies de ce genre, sur l'orthose et la mésolite.

Si le plan d'hémitropie est normal à un axe de symétrie d'ordre impair, c'est-à-dire à un axe ternaire, alors, au lieu de concevoir que la moitié inférieure du cristal a tourné de 180 degrés autour de l'axe ternaire, on peut se borner à lui imprimer une rotation de 60 degrés dont le résultat final sera le même. Haüy avait désigné ce genre d'hémitropie sous le nom de *transposition :* il est fréquent dans les cristaux du système ternaire et du système terquaternaire.

Lorsqu'un cristal dérivant du polyèdre $[A^3, \text{o}L^2, \text{o}C, 3P \text{ ou } 3P']$ présente une hémitropie normale à l'axe ternaire, ce cristal simule un polyèdre moléculaire $[A^3, 3L'^2 \text{ ou } 3L^2, \text{o}C, \Pi, 3P \text{ ou } 3P']$. Dans les mêmes circonstances, le polyèdre $[A^3, \text{o}L^2, \text{o}C, \text{o}P]$ pourra simuler le polyèdre $[A^3, \text{o}L^2, \text{o}C, \Pi]$; l'observateur devra se tenir en garde contre ces fausses apparences. On reconnaîtra de telles hémitropies, soit par les angles rentrants du cristal, soit par la ligne de suture courant au travers des faces de la zone {*ghi*o} qui sépare le sommet supérieur du sommet inférieur, soit enfin, à défaut de ces signes, par l'examen d'un certain nombre d'échantillons qui, si la disposition signalée est purement accidentelle, permettra de rapporter le cristal à la catégorie des cristaux hémitropiques, ou, dans le cas contraire, à celle des cristaux du système ternaire.

Plan d'hémitropie appartenant à une forme orthoparallèle. — Dans le système terquaternaire, les plans d'hémitropie paraissent être toujours parallèles aux axes quaternaires ou binaires.

Dans les systèmes sénaire et ternaire, ces plans, y compris le cas de perpendicularité à l'axe ternaire, sont toujours parallèles à l'un des trois axes de la symétrie binaire. Exemples : le quartz, la chaux carbonatée, la dolo-

mie ; tantôt le plan d'hémitropie est l'une des faces du prisme hexaèdre régulier, tantôt il est parallèle à l'une des faces du rhomboèdre primitif.

Il en est de même dans le système quaternaire : le plan d'hémitropie est parallèle à l'une des faces de l'un des deux octaèdres de premier ou de second ordres. Exemples : l'oxyde d'étain, le rutile, l'hausmanite.

La même loi s'applique aux cristaux du système terbinaire ; le plan d'hémitropie est parallèle à l'un des trois axes. Exemples : le plomb carbonaté, l'arragonite, l'acerdèse, la faujasite.

Dans tous ces systèmes, je ne connais point d'exemple d'accolement suivant une des faces de la forme oblique $\{ghk\}$.

Dans le système binaire, les plans de presque toutes les hémitropies connues appartiennent à des faces de la zone $\{gh i o\}$ qui est parallèle à l'axe binaire du système. Exemples : la chaux sulfatée, l'orthose, le pyroxène, le fer arsenical, le schéelin ferruginé, le cuivre carbonaté vert, l'épidote, le sphène, la vauquelinite.

Plan d'hémitropie appartenant à une forme oblique. — Ce genre d'hémitropie n'a guère lieu que pour des cristaux appartenant au système asymétrique, tels que le disthène, l'anorthite, l'albite. Cependant on en connaît un exemple dans un cristal binaire, l'orthose, où le plan d'hémitropie est parfois parallèle à la face de notation $e^{\frac{1}{2}}$, comme on le voit fréquemment sur les cristaux de Baveno (*).

Les explications que nous venons de donner s'appliquent à l'immense majorité des cas d'hémitropie observés. Il reste cependant quelques formes singulières dont la détermination et l'explication rigoureuses exigeront de nouvelles recherches.

Ainsi, quelquefois la loi générale de l'hémitropie rétieulaire est conservée ; l'un des cristaux dérive de l'autre par rotation autour d'une ligne normale à une face de notation simple ; mais les deux moitiés, au lieu de rester accolées suivant le plan d'hémitropie, semblent s'être pénétrées mutuellement suivant des plans de séparation diversement endentés les uns

(*) Dufrénoy, *Traité de Minéralogie*, tome III, page 346.

dans les autres. Telles sont les macles de la phakolite et de la lévyne; telle aussi une macle de cuivre gris figurée par M. Dufrénoy (*); je me suis assuré que les macles du sucre offrent très-souvent cette singulière disposition.

D'autres fois, la demi-rotation qui fait dériver l'un des demi-cristaux de son voisin, paraît avoir eu lieu autour d'une arête non perpendiculaire aux faces. On peut citer, comme exemple, l'hémitropie de l'orthose par rotation autour de l'arête H des cristallographes (**) : mais comme cette arête est normale à l'axe binaire du système, on peut faire faire au demi-cristal dérivé un demi-tour autour de cet axe binaire, sans troubler son Assemblage, et l'effet total de ces deux rotations équivaudra à une rotation unique de 180 degrés autour de la droite normale au plan des deux premiers axes de rotation, c'est-à-dire à la face h^1 du cristal, de sorte que l'exception n'est qu'apparente. Dans ce cas encore, il se fait une pénétration plus ou moins intime. Je pense qu'il en est de même pour les macles, avec emboîtement, de la bournonite, du plomb carbonaté, de la staurotide, de l'harmotome, de la cimophane, etc.

Ces cas singuliers méritent de fixer l'attention des minéralogistes.

Le résultat de mon travail est donc en définitive que la théorie des molécules discontinues, polyatomiques et de forme symétrique, rend un compte beaucoup plus satisfaisant de l'ensemble des faits cristallographiques que l'ancienne théorie des molécules continues et monoatomiques.

(*) Atlas du *Traité de Minéralogie*, *Pl.* CXXIV, *fig.* 442.

(**) Dufrénoy, *Traité de Minéralogie*, tome III, page 347.

Tableau N° L.

Valeurs de la quantité Σ^2, carré de l'aire du parallélogramme générateur, pour les principales formes du Système terquaternaire.

MODE HEXAÉDRAL.		MODE OCTAÉDRAL.		MODE DODÉCAÉDRAL.	
FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$
{100}	1	{111}	3	{110}	2
{110}	2	{100}	4	{100}	4
{111}	3	{110}	8	{211}	6
{210}	5	{311}	11	{310}	10
{211}	6	{331}	19	{111}	12
{221}	9	{210}	20	{321}	14
{310}	10	{211}	24	{411}	18
{311}	11	{511}	27	{210}	20
{320}	13	{531}	35	{332}	22
{321}	14	{221}	36	{431}	26
{322}	17	{310}	40	{510}	26
{410}	17	{533}	43	{521}	30
{411}	18	{551}	51	{530}	34
{331}	19	{711}	51	{221}	36
{421}	21	{320}	52	{532}	38
{332}	22	{321}	56	{611}	38
{430}	25	{553}	59	{541}	42
{431}	26	{731}	59	{311}	44
{510}	26	{733}	67	{631}	46
{511}	27	{322}	68	{543}	50
{432}	29	{410}	68	{710}	50
{520}	29	{411}	72	{320}	52
{521}	30	{751}	75	{552}	54
{441}	33	{753}	83	{721}	54
{522}	33	{421}	84	{730}	58

Tableau N° II.

Valeurs de la quantité Σ^2, carré de l'aire du parallélogramme générateur, pour les principales formes du Système sénaire, rapporté à ses axes binaires de première espèce, et aux notations à quatre caractéristiques.

FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$
$\{10\bar{1}0\}$	2	$\{0001\}$	λ	$\{10\bar{1}2\}$	$2+4\lambda$	$\{10\bar{1}3\}$	$2+9\lambda$	$\{10\bar{1}4\}$	$2+16\lambda$
$\{11\bar{2}0\}$	6	$\{10\bar{1}1\}$	$2+\lambda$	$\{11\bar{2}2\}$	$6+4\lambda$	$\{11\bar{2}3\}$	$6+9\lambda$	$\{11\bar{2}4\}$	$6+16\lambda$
$\{21\bar{3}0\}$	14	$\{11\bar{2}1\}$	$6+\lambda$	$\{21\bar{3}2\}$	$14+4\lambda$	$\{20\bar{2}3\}$	$8+9\lambda$	$\{21\bar{3}4\}$	$14+16\lambda$
$\{31\bar{4}0\}$	26	$\{20\bar{2}1\}$	$8+\lambda$	$\{30\bar{3}2\}$	$18+4\lambda$	$\{21\bar{3}3\}$	$14+9\lambda$	$\{30\bar{3}4\}$	$18+16\lambda$
$\{32\bar{5}0\}$	38	$\{21\bar{3}1\}$	$14+\lambda$	$\{31\bar{4}2\}$	$26+4\lambda$	$\{22\bar{4}3\}$	$24+9\lambda$	$\{31\bar{4}4\}$	$26+16\lambda$
$\{41\bar{5}0\}$	42	$\{30\bar{3}1\}$	$18+\lambda$	$\{32\bar{5}2\}$	$38+4\lambda$	$\{31\bar{4}3\}$	$26+9\lambda$	$\{32\bar{5}4\}$	$38+16\lambda$
$\{51\bar{6}0\}$	62	$\{22\bar{4}1\}$	$24+\lambda$	$\{41\bar{5}2\}$	$42+4\lambda$	$\{40\bar{4}3\}$	$32+9\lambda$	$\{41\bar{5}4\}$	$42+16\lambda$
$\{43\bar{7}0\}$	74	$\{31\bar{4}1\}$	$26+\lambda$	$\{50\bar{5}2\}$	$50+4\lambda$	$\{32\bar{5}3\}$	$38+9\lambda$	$\{50\bar{5}4\}$	$50+16\lambda$
$\{52\bar{7}0\}$	78	$\{40\bar{4}1\}$	$32+\lambda$	$\{33\bar{6}2\}$	$54+4\lambda$	$\{41\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{33\bar{6}4\}$	$54+16\lambda$
$\{61\bar{7}0\}$	86	$\{32\bar{5}1\}$	$38+\lambda$	$\{51\bar{6}2\}$	$62+4\lambda$	$\{50\bar{5}3\}$	$50+9\lambda$	$\{51\bar{6}4\}$	$62+16\lambda$
$\{53\bar{8}0\}$	98	$\{41\bar{5}1\}$	$42+\lambda$	$\{43\bar{7}2\}$	$74+4\lambda$	$\{42\bar{6}3\}$	$56+9\lambda$	$\{43\bar{7}4\}$	$74+16\lambda$
»	»	$\{50\bar{5}1\}$	$50+\lambda$	»	»	$\{51\bar{6}3\}$	$62+9\lambda$	»	»
$\{10\bar{1}5\}$	$2+25\lambda$	$\{10\bar{1}6\}$	$2+36\lambda$	$\{10\bar{1}7\}$	$2+49\lambda$	$\{10\bar{1}8\}$	$2+64\lambda$	$\{10\bar{1}9\}$	$2+81\lambda$
$\{11\bar{2}5\}$	$6+25\lambda$	$\{11\bar{2}6\}$	$6+36\lambda$	$\{11\bar{2}7\}$	$6+49\lambda$	$\{11\bar{2}8\}$	$6+64\lambda$	$\{11\bar{2}9\}$	$6+81\lambda$
$\{20\bar{2}5\}$	$8+25\lambda$	$\{2136\}$	$14+36\lambda$	$\{20\bar{2}7\}$	$8+49\lambda$	$\{21\bar{3}8\}$	$14+64\lambda$	$\{20\bar{2}9\}$	$8+81\lambda$
$\{21\bar{3}5\}$	$14+25\lambda$	$\{31\bar{4}6\}$	$26+36\lambda$	$\{21\bar{3}7\}$	$14+49\lambda$	$\{30\bar{3}8\}$	$18+64\lambda$	»	»
$\{30\bar{3}5\}$	$18+25\lambda$	$\{32\bar{5}6\}$	$38+36\lambda$	$\{30\bar{3}7\}$	$18+49\lambda$	$\{31\bar{4}8\}$	$26+64\lambda$	»	»
$\{22\bar{4}5\}$	$24+25\lambda$	$\{41\bar{5}6\}$	$42+36\lambda$	$\{22\bar{4}7\}$	$24+49\lambda$	»	»	»	»
$\{31\bar{4}5\}$	$26+25\lambda$	$\{50\bar{5}6\}$	$50+36\lambda$	$\{31\bar{4}7\}$	$26+49\lambda$	»	»	»	»
$\{40\bar{4}5\}$	$32+25\lambda$	»	»	»	»	»	»	»	»
$\{32\bar{5}5\}$	$38+25\lambda$	»	»	»	»	»	»	»	»

TABLEAU N° III.

Valeurs de la quantité Σ^2, carré de l'aire du parallélogramme générateur, pour les différentes formes du Système quaternaire.

FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$
Mode hexaédral, rapporté à ses axes binaires de première espèce.									
{100}	1	{001}	λ	{102}	1+4λ	{103}	1+9λ	{104}	1+16λ
{110}	2	{101}	1+λ	{112}	2+4λ	{113}	2+9λ	{114}	2+16λ
{210}	5	{111}	2+λ	{212}	5+4λ	{203}	4+9λ	{214}	5+16λ
{310}	10	{201}	4+λ	{302}	9+4λ	{213}	5+9λ	{304}	9+16λ
{320}	13	{211}	5+λ	{312}	10+4λ	{223}	8+9λ	{314}	10+16λ
{410}	17	{221}	8+λ	{322}	13+4λ	{313}	10+9λ	»	»
{430}	25	{301}	9+λ	{412}	17+4λ	{323}	13+9λ	»	»
{510}	26	{311}	10+λ	{332}	18+4λ	{403}	16+9λ	»	»
{520}	29	{321}	13+λ	{432}	25+4λ	{413}	17+9λ	»	»
{530}	34	{401}	16+λ	{502}	25+4λ	{423}	20+9λ	»	»
{610}	37	{411}	17+λ	{512}	26+4λ	{433}	25+9λ	»	»
Mode octaédral, rapporté à ses axes binaires de première espèce.									
{110}	2	{101}	1+λ	{001}	4λ	{103}	1+9λ	{114}	2+16λ
{100}	4	{211}	5+λ	{112}	2+4λ	{213}	5+9λ	{102}	4+16λ
{310}	10	{301}	9+λ	{111}	8+4λ	{323}	13+9λ	{314}	10+16λ
{210}	20	{321}	13+λ	{312}	10+4λ	{413}	17+9λ	{334}	18+16λ
{510}	26	{411}	17+λ	{201}	16+4λ	{433}	25+9λ	{212}	20+16λ
{530}	34	{431}	25+λ	{332}	18+4λ	{503}	25+9λ	»	»
{710}	50	{501}	25+λ	{512}	26+4λ	{523}	29+9λ	»	»
{320}	52	{521}	29+λ	{221}	32+4λ	{613}	37+9λ	»	»
{730}	58	{611}	37+λ	{532}	34+4λ	{543}	41+9λ	»	»
{410}	68	{541}	41+λ	{311}	40+4λ	{703}	49+9λ	»	»
{750}	74	{631}	45+λ	{552}	50+4λ	{723}	53+9λ	»	»

TAB. N° IV. — *Valeurs de la quantité Σ^2, carré de l'aire du parallélogramme générateur, pour les principales formes du Système ternaire, les axes de symétrie étant pris pour axes cristallographiques.*

FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$
Notation à quatre caractéristiques, la forme $\{01\bar{1}1\}$ étant le rhomboèdre générateur de l'Assemblage.									
$\{11\bar{2}0\}$	6	$\{01\bar{1}1\}$	$2+\lambda$	$\{10\bar{1}2\}$	$2+4\lambda$	$\{0001\}$	9λ	$\{01\bar{1}4\}$	$2+16\lambda$
$\{10\bar{1}0\}$	18	$\{2021\}$	$8+\lambda$	$\{21\bar{3}2\}$	$14+4\lambda$	$\{11\bar{2}3\}$	$6+9\lambda$	$\{12\bar{3}4\}$	$14+16\lambda$
$\{41\bar{5}0\}$	42	$\{12\bar{3}1\}$	$14+\lambda$	$\{13\bar{4}2\}$	$26+4\lambda$	$\{10\bar{1}1\}$	$18+9\lambda$	$\{31\bar{4}4\}$	$26+16\lambda$
$\{52\bar{7}0\}$	78	$\{31\bar{4}1\}$	$26+\lambda$	$\{32\bar{5}2\}$	$38+4\lambda$	$\{22\bar{4}3\}$	$24+9\lambda$	$\{23\bar{5}4\}$	$38+16\lambda$
$\{71\bar{8}0\}$	114	$\{04\bar{4}1\}$	$32+\lambda$	$\{05\bar{5}2\}$	$50+4\lambda$	$\{14\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{50\bar{5}4\}$	$50+16\lambda$
$\{21\bar{3}0\}$	126	$\{23\bar{5}1\}$	$38+\lambda$	$\{51\bar{6}2\}$	$62+4\lambda$	$\{41\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{15\bar{6}4\}$	$62+16\lambda$
$\{74\bar{11}0\}$	186	$\{50\bar{5}1\}$	$50+\lambda$	$\{43\bar{7}2\}$	$74+4\lambda$	$\{11\bar{2}1\}$	$54+9\lambda$	$\{34\bar{7}4\}$	$74+16\lambda$
$\{31\bar{4}0\}$	234	$\{42\bar{6}1\}$	$56+\lambda$	$\{16\bar{7}2\}$	$86+4\lambda$	$\{02\bar{2}1\}$	$72+9\lambda$	»	»
»	»	$\{15\bar{6}1\}$	$62+\lambda$	$\{35\bar{8}2\}$	$98+4\lambda$	$\{25\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$	»	»
»	»	$\{34\bar{7}1\}$	$74+\lambda$	$\{70\bar{7}2\}$	$98+4\lambda$	$\{52\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$	»	»
»	»	$\{61\bar{7}1\}$	$86+\lambda$	»	»	$\{44\bar{8}3\}$	$96+9\lambda$	»	»
Notation à quatre caractéristiques, la forme $\{10\bar{1}1\}$ étant le rhomboèdre générateur de l'Assemblage.									
$\{11\bar{2}0\}$	6	$\{10\bar{1}1\}$	$2+\lambda$	$\{01\bar{1}2\}$	$2+4\lambda$	$\{0001\}$	9λ	$\{10\bar{1}4\}$	$2+16\lambda$
$\{10\bar{1}0\}$	18	$\{02\bar{2}1\}$	$8+\lambda$	$\{12\bar{3}2\}$	$14+4\lambda$	$\{11\bar{2}3\}$	$6+9\lambda$	$\{21\bar{3}4\}$	$14+16\lambda$
$\{41\bar{5}0\}$	42	$\{21\bar{3}1\}$	$14+\lambda$	$\{31\bar{4}2\}$	$26+4\lambda$	$\{01\bar{1}1\}$	$18+9\lambda$	$\{13\bar{4}4\}$	$26+16\lambda$
$\{52\bar{7}0\}$	78	$\{13\bar{4}1\}$	$26+\lambda$	$\{23\bar{5}2\}$	$38+4\lambda$	$\{2243\}$	$24+9\lambda$	$\{32\bar{5}4\}$	$38+16\lambda$
$\{71\bar{8}0\}$	114	$\{40\bar{4}1\}$	$32+\lambda$	$\{50\bar{5}2\}$	$50+4\lambda$	$\{41\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{05\bar{5}4\}$	$50+16\lambda$
$\{21\bar{3}0\}$	126	$\{32\bar{5}1\}$	$38+\lambda$	$\{15\bar{6}2\}$	$62+4\lambda$	$\{14\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{51\bar{6}4\}$	$62+16\lambda$
$\{74\bar{11}0\}$	186	$\{05\bar{5}1\}$	$50+\lambda$	$\{34\bar{7}2\}$	$74+4\lambda$	$\{11\bar{2}1\}$	$54+9\lambda$	$\{43\bar{7}4\}$	$74+16\lambda$
$\{31\bar{4}0\}$	234	$\{24\bar{6}1\}$	$56+\lambda$	$\{61\bar{7}2\}$	$86+4\lambda$	$\{20\bar{2}1\}$	$72+9\lambda$	»	»
»	»	$\{51\bar{6}1\}$	$62+\lambda$	$\{5382\}$	$98+4\lambda$	$\{52\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$	»	»
»	»	$\{43\bar{7}1\}$	$74+\lambda$	$\{07\bar{7}2\}$	$98+4\lambda$	$\{25\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$	»	»
»	»	$\{16\bar{7}1\}$	$86+\lambda$	»	»	$\{44\bar{8}3\}$	$96+9\lambda$	»	»

Tableau N° V.

Valeurs de la quantité Σ^2, carré de l'aire du parallélogramme générateur, pour les principales formes du Système ternaire, les arêtes du rhomboèdre générateur étant prises pour axes cristallographiques.

FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$
Notation à trois caractéristiques, la forme $\{100\}$ étant le rhomboèdre générateur de l'Assemblage.									
$\{1\bar{1}0\}$	6	$\{100\}$	$2+\lambda$	$\{101\}$	$2+4\lambda$	$\{111\}$	9λ	$\{211\}$	$2+16\lambda$
$\{1\bar{2}1\}$	18	$\{1\bar{1}1\}$	$8+\lambda$	$\{2\bar{1}1\}$	$14+4\lambda$	$\{201\}$	$6+9\lambda$	$\{301\}$	$14+16\lambda$
$\{23\bar{1}\}$	42	$\{2\bar{1}0\}$	$14+\lambda$	$\{3\bar{1}0\}$	$26+4\lambda$	$\{2\bar{1}2\}$	$18+9\lambda$	$\{3\bar{1}2\}$	$26+16\lambda$
$\{3\bar{4}1\}$	78	$\{2\bar{2}1\}$	$26+\lambda$	$\{3\bar{2}1\}$	$38+4\lambda$	$\{3\bar{1}1\}$	$24+9\lambda$	$\{4\bar{1}1\}$	$38+16\lambda$
$\{3\bar{5}2\}$	114	$\{3\bar{1}\bar{1}\}$	$32+\lambda$	$\{4\bar{1}\bar{1}\}$	$50+4\lambda$	$\{4\bar{1}0\}$	$42+9\lambda$	$\{3\bar{2}3\}$	$50+16\lambda$
$\{4\bar{5}1\}$	126	$\{3\bar{2}0\}$	$38+\lambda$	$\{3\bar{3}2\}$	$62+4\lambda$	$\{3\bar{2}2\}$	$42+9\lambda$	$\{5\bar{1}0\}$	$62+16\lambda$
$\{5\bar{6}1\}$	186	$\{2\bar{3}2\}$	$50+\lambda$	$\{4\bar{3}1\}$	$74+4\lambda$	$\{4\bar{2}1\}$	$54+9\lambda$	$\{5\bar{2}1\}$	$74+16\lambda$
$\{5\bar{7}2\}$	234	$\{3\bar{3}1\}$	$56+\lambda$	$\{5\bar{2}\bar{1}\}$	$86+4\lambda$	$\{5\bar{1}\bar{1}\}$	$72+9\lambda$	»	»
»	»	$\{4\bar{2}\bar{1}\}$	$62+\lambda$	$\{5\bar{3}0\}$	$98+4\lambda$	$\{5\bar{2}0\}$	$78+9\lambda$	»	»
»	»	$\{4\bar{3}0\}$	$74+\lambda$	$\{3\bar{4}3\}$	$98+4\lambda$	$\{4\bar{3}2\}$	$78+9\lambda$	»	»
»	»	$\{3\bar{4}2\}$	$86+\lambda$	»	»	$\{5\bar{3}1\}$	$96+9\lambda$	»	»

TABLEAU N° VI. — *Valeurs de Σ^2, carré de l'aire du parallélogramme générateur, pour les principales formes du Système terbinaire.*

FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$	FORME	$\Sigma^2 =$
Mode hexaédral rectangulaire.						Mode hexaédral rhombique, à base rhombe située sur le plan des xy.			
{100}	λ'	{010}	λ	{001}	1	{001}	1	{10k}	$4\lambda' + 4k^2$
{110}	$\lambda' + \lambda$	{101}	$\lambda' + 1$	{011}	$\lambda + 1$	{11k}	$\lambda' + \lambda + k^2$	{01k}	$4\lambda + 4k^2$
{111}	$\lambda' + \lambda + 1$	»	»	»	»	{20k}	$4\lambda' + k^2$	{21k}	$16\lambda' + 4\lambda + 4k^2$
{210}	$4\lambda' + \lambda$	{201}	$4\lambda' + 1$	{012}	$\lambda + 4$	{02k}	$4\lambda + k^2$	{12k}	$4\lambda' + 16\lambda + 4k^2$
{120}	$\lambda' + 4\lambda$	{102}	$\lambda' + 4$	{021}	$4\lambda + 1$	{22k}	$4\lambda' + 4\lambda + k^2$	{30k}	$36\lambda' + 4k^2$
{211}	$4\lambda' + \lambda + 1$	{121}	$\lambda' + 4\lambda + 1$	{112}	$\lambda' + \lambda + 4$	{31k}	$9\lambda' + \lambda + k^2$	{03k}	$36\lambda + 4k^2$
						{13k}	$\lambda' + 9\lambda + k^2$	»	»
						{40k}	$16\lambda' + k^2$	»	»
						{04k}	$16\lambda + k^2$	»	»
Mode octaédral rectangulaire.						Mode octaédral rhombique.			
{110}	$\lambda' + \lambda$	{100}	$4\lambda'$	»	»	{111}	$\lambda' + \lambda + 1$	{100}	$4\lambda'$
{101}	$\lambda' + 1$	{010}	4λ	»	»	{311}	$9\lambda' + \lambda + 1$	{010}	4λ
{011}	$\lambda + 1$	{001}	4	»	»	{131}	$\lambda' + 9\lambda + 1$	{001}	4
{211}	$4\lambda' + \lambda + 1$	{111}	$4\lambda' + 4\lambda + 4$	»	»	{113}	$\lambda' + \lambda + 9$	{110}	$4\lambda' + 4\lambda$
{121}	$\lambda' + 4\lambda + 1$	{210}	$16\lambda' + 4\lambda$	»	»	{331}	$9\lambda' + 9\lambda + 1$	{101}	$4\lambda' + 4$
{112}	$\lambda' + \lambda + 4$	{201}	$16\lambda' + 4$	»	»	{313}	$9\lambda' + \lambda + 9$	{011}	$4\lambda + 4$
{310}	$9\lambda' + \lambda$	{120}	$4\lambda' + 16\lambda$	»	»	{133}	$\lambda' + 9\lambda + 9$	{210}	$16\lambda' + 4\lambda$
{301}	$9\lambda' + 1$	{102}	$4\lambda' + 16$	»	»			{120}	$4\lambda' + 16\lambda$
{130}	$\lambda' + 9\lambda$	{021}	$16\lambda + 4$	»	»			{201}	$16\lambda' + 4$
{103}	$\lambda' + 9$	{012}	$4\lambda + 16$	»	»			{102}	$4\lambda' + 16$
{031}	$9\lambda + 1$	»	»	»	»			{021}	$16\lambda + 4$
{013}	$\lambda + 9$	»	»	»	»			{012}	$4\lambda + 16$

TABLEAU N° VII.

Classification des polyèdres, d'après la nature de leur symétrie.

POLYÈDRE			SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE DU POLYÈDRE.	CLASSE du polyèdre
Asymétrique			$o L, o C, o P$.	1re
Symetrique	dépourvu d'axes		$o L, C, o P$.	2e
			$o L, o C, P$.	3e
	pourvu d'un axe principal	d'ordre pair	$A^{2q}, o L^2, o C, o P$.	4e
			$A^{2q}, o L^2, C, \Pi$.	5e
			$A^{2q}, q L^2, q L'^2, o C, o P$.	6e
			$A^{2q}, o L^2, o C, q P, q P'$.	7e
			$A^{2q}, q L^2, q L'^2, C, \Pi, q P^2, q P'^2$.	8e
			$A^{2q}, 2q L^2, o C, 2q P$.	9e
		d'ordre impair	$A^{2q+1}, o L^2, o C, o P$.	10e
			$A^{2q+1}, o L^2, C, o P$.	11e
			$A^{2q+1}, o L^2, o C, \Pi$.	12e
			$A^{2q+1}, (2q+1) L^2, o C, o P$.	13e
			$A^{2q+1}, o L^2, o C, (2q+1) P$.	14e
			$A^{2q+1}, (2q+1) L^2, C, (2q+1) P^2$.	15e
			$A^{2q+1}, (2q+1) L^2, o C, \Pi, (2q+1) P$	16e
	spheroedrique	quaterternaire	$4 L^3, 3 L^2, o C, o P$.	17e
			$4 L^3, 3 L^2, C, 3 P^2$.	18e
			$4 L^3, 3 L^2, o C, 6 P$.	19e
			$3 L^4, 4 L^3, 6 L^2, o C, o P$.	20e
			$3 L^4, 4 L^3, 6 L^2, C, 3 P^4, 6 P^2$.	21e
		décemternaire	$6 L^5, 10 L^3, 15 L^2, o C, o P$.	22e
			$6 L^5, 10 L^3, 15 L^2, C, 15 P^2$.	23e

Dans ce tableau, q est un nombre entier quelconque, positif, et au moins égal à 1.

Tableau N° VIII.

Classification des polyèdres moléculaires, d'après les systèmes cristallins auxquels ils se rapportent.

SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre moléculaire, $[S_c, S_p]$.	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre équivalent, $[S_c]$.
Système asymétrique $[oL, C, oP]$	
$oL, C, oP,$ $A^{6m\pm1}, oL^2, C, oP,$ $A^1, oL^1, C, oP,$	$oL, C, oP.$
$oL, oC, oP,$ $A^{6m\pm1}, oL^2, oC, oP,$ $A^1, oL^2, oC, oP,$	$oL, oC, oP.$
Systeme binaire $[A^2, oL^2, C, \Pi]$	
$A^{12m\pm2}, oL^2, C, \Pi, oP,$ $A^2, oL^2, C, \Pi, oP,$ $A^{6m\pm1}, (6m\pm1)L^2, C, (6m\pm1)P,$ $A^5, 5L^2, C, 5P,$	$A^2, C, \Pi.$
$A^{12m\pm2}, oL^2, oC, oP,$ $A^2, oL^2, oC, oP,$ $A^{6m\pm1}, (6m\pm1)L^2, oC, oP,$ $A^5, 5L^2, oC, oP,$	$A^2, oC, oP.$
$oL, oC, P,$ $A^{6m\pm1}, oL^2, oC, (6m\pm1)P,$ $A^5, oL^2, oC, 5P,$ $A^{6m\pm1}, oL^2, oC, \Pi,$ $A^5, oL^2, oC, \Pi,$	$oL^2, oC, \Pi.$
Système terbinaire $[A^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2]$	
$A^{12m\pm2}, (6m\pm1)L^2, (6m\pm1)L'^2, C, \Pi, (6m\pm1)P^2, (6m\pm1)P'^2$ $A^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2,$	$A^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2.$
$A^{12m\pm2}, (6m\pm1)L^2, (6m\pm1)L'^2, oC, oP,$ $A^2, L^2, L'^2, oC, oP,$	$A^2, L^2, L'^2, oC, oP.$
$A^{12m\pm2}, oL^2, oC, (6m\pm1)P, (6m\pm1)P',$ $A^2, oL^2, oC, P, P',$ $A^{6m\pm1}, (6m\pm1)L^2, oC, \Pi, (6m\pm1)P^2,$ $A^5, 5L^2, oC, \Pi, 5P,$	$A^2, oC, P, P'.$

[Suite.]

TABLEAU N° VIII.

Classification des polyèdres moléculaires, d'après les Systèmes cristallins auxquels ils se rapportent.

SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre moléculaire, $[S_c, S_p]$.	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre équivalent, $[S_c]$.
Système ternaire $[A^3, 3L^2, C, 3P^2]$	
$A^{6m+3}, (6m+3)L^2, C, (6m+3)P^2,$ $A^3, 3L^2, C, 3P^2,$	$A^3, 3L^2, C, 3P^2.$
$A^{6m+3}, (6m+3)L^2, oC, oP,$ $A^3, 3L^2, oC, oP,$	$A^3, 3L^2, oC, oP.$
$A^{6m+3}, oL^2, oC, (6m+3)P,$ $A^3, oL^2, oC, 3P,$	$A^3, oL^2, oC, 3P.$
$A^{6m+3}, oL^2, C, oP,$ $A^3, oL^2, C, oP,$	$A^3, oL^2, C, oP.$
$A^{6m+3}, oL^2, oC, oP,$ $A^3, oL^2, oC, oP,$	$A^3, oL^2, oC, oP.$
Système quaternaire $[A^4, 2L^2, 2L'^2, C, \Pi, 2P^2, 2P'^2]$	
$A^{12m\pm4}, (6m\pm2)L^2, (6m\pm2)L'^2, C, \Pi, (6m\pm2)P^2, (6m\pm2)P'^2$ $A^4, 2L^2, 2L'^2, C, \Pi, 2P^2, 2P'^2,$	$A^4, 2L^2, 2L'^2, C, \Pi, 2P^2, 2P'^2$
$A^{12m\pm4}, (6m\pm2)L^2, (6m\pm2)L'^2, oC, oP,$ $A^4, 2L^2, 2L'^2, oC, oP,$ $A^{12m\pm4}, (12m\pm4)L^2, oC, (12m\pm4)P,$ $A^4, 4L^2, oC, 4P,$	$A^4, 2L^2, 2L'^2, oC, oP.$
$A^{12m\pm2}, (12m\pm2)L^2, oC, (12m\pm2)P,$ $A^2, 2L^2, oC, 2P,$	ou $A^4, 2L^2, oC, 2P'$, ou $A^4, 2L'^2, oC, 2P.$
$A^{12m\pm4}, oL^2, oC, (6m\pm2)P, (6m\pm2)P',$ $A^4, oL^2, oC, 2P, 2P',$ $A^{12m\pm2}, (12m\pm4)L^2, oC, (12m\pm4)P,$ $A^4, 4L^2, oC, 4P,$	$A^4, oL^2, oC, 2P, 2P'.$
$A^{12m\pm4}, oL^2, C, \Pi,$ $A^4, oL^2, C, \Pi,$	$A^4, oL^2, C, \Pi.$
$A^{12m\pm4}, oL^2, oC, oP,$ $A^4, oL^2, oC, oP,$	$A^4, oL^2, oC, oP.$
Système sénaire $[A^6, 3L^2, 3L'^2, C, \Pi, 3P^2, 3P'^2]$	
$A^{6m}, 3mL^2, 3mL'^2, C, \Pi, 3mP^2, 3mP'^2,$ $A^6, 3L^2, 3L'^2, C, \Pi, 3P^2, 3P'^2,$	$A^6, 3L^2, 3L'^2, C, \Pi, 3P^2, 3P'^2.$

[Suite.] TABLEAU N° VIII. — *Classification des polyèdres moléculaires, d'après les Systèmes cristallins auxquels ils se rapportent.*

SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre moléculaire, (S_c, S_p).	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre équivalent, (S_c).
[Suite.] Système sénaire $[A^6, 3L^2, 3L'^2, C, \Pi, 3P^2, 3P'^2]$	
$A^{6m}, 3mL^2, 3mL'^2$, o C, o P, $A^6, 3L^2, 3L'^2$, o C, o P, $A^{6m}, 6mL^2$, o C, $6mP$, $A^6, 6L^2$, o C, 6P,	$A^6, 3L^2, 3L'^2$, o C, o P.
$A^{6m+3}, (6m+3)L^2$, o C, Π, $(6m+3)P$, $A^3, 3L^2$, o C, Π, 3P,	ou $A^3, 3L^2$, o C, Π, 3P', ou $A^3, 3L'^2$, o C, Π, 3P.
A^{3m}, o L^2, o C, $3mP$, $3mP'$, A^6, o L^2, o C, 3P, 3P', $A^{3m}, 6mL^2$, o C, $6mP$, $A^6, 6L^2$, o C, 6P,	A^6, o L^2, o C, 3P, 3P'.
$A^{6m+3}, (6m+3)L^2$, C, $(6m+3)P^2$, $A^3, 3L^2$, C, $3P^2$,	ou $A^3, 3L^2$, C, $3P^2$, ou $A^3, 3L'^2$, C, $3P'^2$.
A^{6m}, o L^2, C, Π, A^6, o L^2, C, Π,	A^6, o L^2, C, Π.
$A^{6m+3}, (6m+3)L^2$, o C, o P, $A^3, 3L^2$, o C, o P,	ou $A^3, 3L^2$, o C, o P, ou $A^3, 3L'^2$, o C, o P.
A^{6m}, o L^2, o C, o P, A^6, o L^2, o C, o P,	A^6, o L^2, o C, o P.
A^{6m+3}, o L^2, o C, $(6m+3)P$, A^3, o L^2, o C, 3P,	ou A^3, o L^2, o C, 3P, ou A^3, o L^2, o C, 3P'.
A^{6m+3}, o L^2, o C, Π, A^3, o L^2, o C, Π,	A^3, o L^2, o C, Π.
A^{6m+3}, o L^2, C, o P, A^3, o L^2, C, o P,	A^3, o L^2, C, o P.
A^{6m+3}, o L^2, o C, o P, A^3, o L^2, o C, o P,	A^3, o L^2, o C, o P.
Système terquaternaire $[3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2]$	
$3L^4, 4L^3, 6L^2$, C, $3P^4, 6P^2$,	$3L^4, 4L^3, 6L^2$, C, $3P^4, 6P^2$.
$3L^4, 4L^3, 6L^2$, o C, o P,	$3L^4, 4L^3, 6L^2$, o C, o P.
$4L^3, 3L^2$, o C, 6P,	$4L^3, 3L^2$, o C, 6P.
$4L^3, 3L^2$, C, $3P^2$, $6L^5, 10L^3, 15L^2$, C, $15P^2$,	$4L^3, 3L^2$, C, $3P^2$.
$4L^3, 3L^2$, o C, o P, $6L^5, 10L^3, 15L^2$, o C, o P,	$4L^3, 3L^2$, o C, o P.

TABLEAU N° IX. — *Nombre de faces des formes cristallines, dans les différents Systèmes, et pour les divers cas d'hémiédrie qu'ils peuvent offrir.*

SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre moléculaire	FORMES OBLIQUES. Détail des faces	FORMES OBLIQUES. Nombre des faces	FORMES PARALLÈLES			FORMES NORMALES		
Système terquaternaire.	Tableau page 223.	"	$\{ggk\}$	$\left\{\begin{matrix} g, h, \\ g \pm h \end{matrix}\right\}$	$\{gho\}$	$\{110\}$	$\{111\}$	$\{100\}$
$3L^2, 4L^3, oC, oP$	Col. 1	12 A	12 B	Comme	12 C	12 D	4 A	6 A
$3L^2, 4L^3, C, 3P^2$	1, 3	24 A	24 D	à	12 C	12 D	8 A	6 A
$3L^2, 4L^3, oC, 6P$	1, 4	24 B	12 B	la colonne	24 E	12 D	4 A	6 A
$3L^4, 4L^3, 6L^2, oC, oP$	1, 2	24 C	24 D	des formes	24 E	12 D	8 A	6 A
$3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^2, 6P^2$	1, 2, 3, 4	48	24 D	obliques.	24 E	12 D	8 A	6 A
Système sénaire.	Tableau page 225.	"	$\{gg\bar{2}gk\}$	$\{go\bar{g}k\}$	$\{gho\}$	$\{11\bar{2}0\}$	$\{10\bar{1}0\}$	$\{0001\}$
A^3, oL^2, oC, oP	Col. 1	3 A	3 A	3 A	3 B	3 B	3 B	1
A^6, oL^2, C, oP	1, 5	6 B	6 B	6 B	6 G	6 G	6 G	2 A
A^6, oL^2, oC, Π	1, 6	6 C	6 C	6 C	3 B	3 B	3 B	2 A
$A^3, oL^2, oC, 3P$	1, 7	6 D	6 E	3 A	6 H	6 G	3 B	1
$A^3, oL^2, oC, 3P'$	1, 8	6 D	3 A	6 E	6 H	3 B	6 G	1
A^6, oL^2, oC, oP	1, 2	6 E	6 E	6 E	6 G	6 G	6 G	1
$A^6, 3L^2, oC, oP$	1, 3	6 F	6 C	6 B	6 H	3 B	6 G	2 A
$A^6, 3L'^2, oC, oP$	1, 4	6 F	6 B	6 C	6 H	6 G	3 B	2 A
A^6, oL^2, C, Π	1, 2, 5, 6	12 E	12 E	12 E	6 G	6 G	6 G	2 A
$A^6, 3L^2, C, 3P^2$	1, 3, 5, 7	12 F	12 E	6 B	12 K	6 G	6 G	2 A
$A^6, 3L'^2, C, 3P'^2$	1, 4, 5, 8	12 F	6 B	12 E	12 K	6 G	6 G	2 A
$A^6, oL^2, oC, 3P, 3P'$	1, 2, 7, 8	12 G	6 E	6 E	12 K	6 G	6 G	1
$A^3, 3L^2, oC, \Pi, 3P'$	1, 3, 6, 8	12 H	6 C	12 E	6 H	3 B	6 G	2 A
$A^3, 3L'^2, oC, \Pi, 3P$	1, 4, 6, 7	12 H	12 E	6 C	6 H	6 G	6 G	2 A
$A^6, 3L^2, 3L'^2, oC, oP$	1, 2, 3, 4	12 I	12 E	12 E	12 K	6 G	3 B	2 A
$A^6, 3L^2, 3L'^2, C, \Pi, 3P^2, 3P'^2$	1 à 8	24 F	12 E	12 E	12 K	6 G	6 G	2 A
Système quaternaire.	Tableau page 228.	"	$\{ohk\}$	$\{gok\}$	$\{gho\}$	$\{110\}$	$\{100\}$	$\{001\}$
A^4, oL^2, oC, oP	Col. 1, 2	4 B	4 B	4 B	4 D	4 D	4 D	1
A^4, oC, oP (*)	1, 6	4 C	4 C	4 C	4 D	4 D	4 D	2 A

(*) Ce polyèdre ne peut cristalliser dans le Système quaternaire que s'il satisfait à certaines conditions particulières énoncées à la page 229.

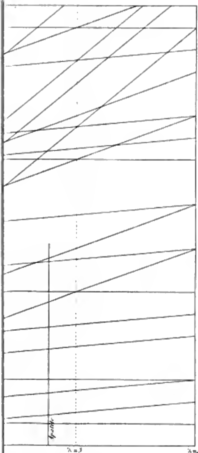
Tableau N° IX. — *Nombre de faces des formes cristallines, dans les différents Systèmes, et pour les divers cas d'hémiédrie qu'ils peuvent offrir.*
[Suite.]

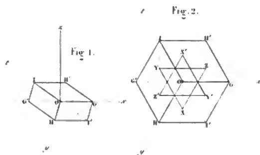
Symbole de la symétrie du polyèdre moléculaire	Formes obliques — Détail des faces	Formes obliques — Nombre des faces.	Formes parallèles			Formes normales.		
[Suite.] Système quaternaire.	Tableau page 228.	»	{ggk}	{gok}	{gho}	{110}	{100}	{001}
A^4, oL^2, C, Π	1, 2, 5, 6	8 B	8 B	8 B	4 D	4 D	4 D	2 A
A^4, oL^2, oC, 2P, 2P'	1, 2, 7, 8	8 C	4 B	4 B	8 F	4 D	4 D	1
A^4, $2L^2$, oC, 2P'	1, 3, 6, 8	8 D	4 C	8 B	8 F	4 D	4 D	2 A
A^4, $2L'^2$, oC, 2P	1, 4, 6, 7	8 D	8 B	4 C	8 F	4 D	4 D	2 A
A^4, $2L^2$, $2L'^2$, oC, oP	1, 2, 3, 4	8 E	8 B	8 B	8 F	4 D	4 D	2 A
A^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, Π, $2P^2$, $2P'^2$	1 à 8	16	8 B	8 B	8 F	4 D	4 D	2 A
Système ternaire.	Tableau page 230.	»	»	{gog̅k}	{ghio}	{112̅0}	»	{0001}
A^3, oL^2, oC, oP	Col. 1	3 A	»	3 A	3 B	3 B	»	1
A^3, oL^2, C, oP	1, 3	6 B	»	6 B	6 G	6 G	»	2 A
A^3, oL^2, oC, 3P	1, 4	6 D	»	3 A	6 H	6 G	»	1
A^3, $3L^2$, oC, oP	1, 2	6 F	»	6 B	6 H	3 B	»	2 A
A^3, $3L^2$, C, $3P^2$	1, 2, 3, 4	12 F	»	6 B	12 K	6 G	»	2 A
Système terbinaire.	Tableau page 231.	»	{ohk}	{gok}	{gho}	{100}	{010}	{001}
A^2, oL^2, oC, P, P'	Col. 1, 4	4 E	2 B	2 B	4 G	2 A	2 A	1
A^2, L^2, L'^2, oC, oP	1, 2	4 F	4 G	4 G	4 G	2 A	2 A	2 A
A^2, L^2, L'^2, C, Π, P^2, P'^2	1, 2, 3, 4	8 G	4 G	4 G	4 G	2 A	2 A	2 A
Système binaire.	Tableau page 232.	»	»	»	{ghio}	»	»	{0001}
oL, oC, Π	Col. 1, 4	2 B	»	»	1	»	»	2 A
A^2, oC, oP	1, 2	2 B	»	»	2 A	»	»	1
A^2, C, Π	1, 2, 3, 4	4 G	»	»	2 A	»	»	2 A
Système asymétrique.	Tableau page 232.	»	»	»	»	»	»	»
oL, oC, oP	Col. 1	1	»	»	»	»	»	»
oL, C, oP	1, 2	2 A	»	»	»	»	»	»

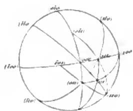
DES CRISTALLOGRAPHIQUES.

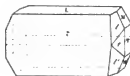
par M. A. Bravais

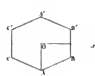
SYSTÈME SENAIRE











... départ de la ligne droite qui représente la face,

... ente la face avec l'arc de cercle pointillé décrit

E. Wormser sc.

ÉTUDES CRISTALLOGRAPHIQUES.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 19.

Fig. 20.

RAPPORTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Par M. CAUCHY.

RAPPORTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Par M. CAUCHY.

Rapport sur un Mémoire de M. Bravais *relatif à certains systèmes ou assemblages de points matériels* (1).

(Commissaires : MM. Biot, Beudant, Dufrénoy, Regnault, Lamé, Cauchy rapporteur.)

Parmi les applications que l'on a faites de la géométrie, l'une des plus remarquables est la science nouvelle créée, vers la fin du dernier siècle, par l'auteur de l'*Essai sur la cristallographie*. Après avoir observé que les cristaux sont des assemblages de molécules similaires, notre illustre Haüy a recherché les lois suivant lesquelles les diverses molécules d'un corps se trouvent réunies et juxtaposées dans un même cristal. Aux observations que l'auteur avait faites, sont venues se joindre des observations nouvelles ; et, enrichie par les fécondes méditations des minéralogistes, la science qu'il avait fondée a pu se perfectionner et s'étendre en participant aux progrès de la physique moléculaire. Toutefois, M. Bravais a pensé que la cristallographie pouvait subir encore des perfectionnements ; et il est effectivement parvenu à découvrir, dans certains systèmes de points matériels, des propriétés qui sont dignes de remarque, et des caractères qui peuvent être utilement employés à la classification des cristaux. L'étude de ces propriétés, de ces caractères, est l'objet spécial du Mémoire dont nous avons en ce moment à rendre compte. Essayons d'en donner une idée en peu de mots.

Considérons trois séries de plans tellement disposés, que les divers plans d'une même série soient parallèles entre eux et équidistants, sans être jamais parallèles à aucun plan d'une autre série. L'assemblage des points suivant lesquels se couperont tous ces plans formera ce qu'on peut appeler un *système réticulaire*, et ce système, suivant la remarque déjà faite par divers auteurs, spécialement par M. Delafosse,

(1) Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 6 août 1849, t. XXIX, p. 133.

sera éminemment propre à représenter le système des points avec lesquels coïncident, dans un cristal quelconque, les centres des diverses molécules. D'ailleurs ces trois séries de plans, dont chacun est appelé, par M. Bravais, *plan réticulaire*, partageront l'espace en *parallélipipèdes élémentaires*, tous égaux entre eux ; et les divers points du système, compris dans un même plan réticulaire, formeront un *réseau* dont les *mailles*, les *fils* et les *nœuds* seront, d'une part, les parallélogrammes élémentaires qui serviront de base aux parallélipipèdes ; d'autre part, les droites sur lesquelles se mesureront les côtés de ces parallélogrammes, et les points d'intersection de ces droites ou les sommets des parallélogrammes dont il s'agit. M. Bravais appelle *paramètres* les longueurs des trois arêtes d'un parallélipipède élémentaire adjacentes à un même sommet ; il nomme *tétraèdre élémentaire* un tétraèdre construit sur ces trois arêtes, et *triangle élémentaire* un triangle qui a pour côtés deux côtés adjacents d'un parallélogramme élémentaire.

Cela posé, M. Bravais commence par établir, tantôt à l'aide de la géométrie, tantôt à l'aide d'une analyse tout à la fois élégante et simple, les propriétés générales des réseaux. Il prouve, en particulier, que les nœuds d'un réseau donné sont en même temps les nœuds d'un nombre infini d'autres réseaux, dont les fils se coupent sous des angles divers, mais dont les mailles sont toujours équivalentes en surface aux mailles du premier. Il prouve encore que, parmi les triangles élémentaires correspondants à ces divers réseaux, il en existe un, mais un seul, qui offre trois angles aigus, et que ce triangle, auquel il donne le nom de *triangle principal*, a pour côtés les trois plus petits paramètres que l'on puisse obtenir en joignant l'un à l'autre les nœuds du réseau donné.

Après avoir établi les propriétés des réseaux, M. Bravais a recherché celles des assemblages ou systèmes réticulaires. Il a reconnu d'abord que les nœuds dont se compose un système réticulaire peuvent être fournis, d'une infinité de manières différentes, par les intersections de trois séries de plans parallèles, auxquels correspondent des parallélipipèdes élémentaires de formes diverses, mais égaux en volumes. Il prouve que, parmi les tétraèdres élémentaires correspondants à un système réticulaire, c'est-à-dire à un système donné de nœuds, il existe un *tétraèdre principal*, dans lequel chaque angle dièdre est ou un angle aigu, ou un angle droit, l'une des bases de ce tétraèdre ayant pour côtés les deux plus petits paramètres que l'on puisse obtenir en joignant l'un à l'autre les nœuds donnés. Enfin, M. Bravais nomme *axe de symétrie* d'un système réticulaire, une droite tellement choisie, qu'il suffise d'imprimer au système autour de cet axe une rotation mesurée par un certain angle pour substituer les divers nœuds les uns aux autres ; puis il démontre que l'angle qui sert de mesure à la rotation doit être nécessairement égal soit à un ou à deux droits, soit au tiers ou aux deux tiers d'un angle droit.

Donc le rapport de la circonférence entière à l'arc qui mesure la rotation ne peut être que l'un des nombres 2, 3, 4, 6; et la symétrie est nécessairement, suivant le langage adopté par M. Bravais, *binaire*, ou *ternaire*, ou *quaternaire*, ou *sénaire*. D'autre part, il est clair que, si un système de nœuds tourne autour d'un axe passant par un point quelconque, le mouvement de rotation effectif de tout le système autour de cet axe ne différera pas du mouvement apparent de rotation autour d'un axe parallèle passant par un nœud quelconque, aux yeux d'un observateur dont la position coïnciderait avec ce même nœud. Il en résulte immédiatement qu'à tout axe de symétrie qui ne passe par aucun nœud d'un système donné, correspondent toujours d'autres axes de symétrie parallèles au premier, et passant par les divers nœuds du système. Il est d'ailleurs facile de voir que tout axe de symétrie passant par un nœud donné, coïncide nécessairement, ou avec l'une des arêtes d'un parallélipipède élémentaire qui a ce nœud pour sommet, ou avec l'une des diagonales d'un tel parallélipipède, ou avec la diagonale de l'une de ses faces. Ces principes étant admis, on peut, comme l'a fait M. Bravais, classer les divers systèmes réticulaires, ou plutôt les divers systèmes de nœuds qu'ils peuvent offrir, d'après le nombre et la nature des axes de symétrie qui passent par un nœud donné. L'auteur compte effectivement sept classes d'assemblages ou systèmes de nœuds, distinguées les unes des autres par les caractères que nous allons rappeler.

Les systèmes de la première classe, correspondants au premier système cristallin des minéralogistes, offrent quatre axes ternaires, trois axes quaternaires et six axes binaires. Les formes distinctes comprises dans cette classe sont : 1° le cube; 2° le cube centré ou rhomboèdre de 120 degrés, ou] octaèdre à base carrée; 3° le tétraèdre régulier, ou octaèdre régulier, ou rhomboèdre de 70° 31′ 44″.

Les systèmes de la seconde classe, correspondants au second système cristallin des minéralogistes, offrent un seul axe quaternaire et quatre axes binaires. Les formes comprises dans cette classe sont : 1° le prisme droit à base carrée; 2° le prisme droit centré à base carrée, ou octaèdre à base carrée.

Les systèmes de la troisième classe offrent un seul axe sénaire et six axes binaires. Cette classe présente d'ailleurs une seule forme, savoir : le prisme droit, qui a pour base un triangle équilatéral.

Les systèmes de la quatrième classe offrent un seul axe ternaire et trois axes binaires. Cette classe présente une seule forme, savoir : un rhomboèdre, dans lequel deux sommets opposés sont les extrémités d'un axe de symétrie ternaire, les six autres sommets étant ceux de deux triangles équilatéraux, dont les plans parallèles entre eux divisent en trois parties égales la diagonale dont il s'agit.

Les systèmes de la troisième et de la quatrième classe correspondent au troisième système cristallin des minéralogistes.

Les systèmes de la cinquième classe, correspondants au quatrième système cristallin des minéralogistes, offrent trois axes binaires. Cette classe présente quatre formes distinctes, savoir : le parallélipipède rectangulaire centré ou non centré, et le même parallélipipède ayant deux ou six faces centrées.

Les systèmes de la sixième classe, correspondants au cinquième système cristallin des minéralogistes, offrent un seul axe binaire. Cette classe présente deux formes, savoir : le prisme droit centré ou non centré, qui a pour base un parallélogramme.

Les systèmes de la septième classe, correspondants au sixième système cristallin des minéralogistes, sont ceux qui n'offrent aucun axe de symétrie. Cette classe comprend une seule forme, savoir : le prisme oblique, qui a pour base un parallélogramme.

En résumé, si, les divers systèmes cristallins étant caractérisés par le nombre et la nature de leurs axes de symétrie, on range ces systèmes dans l'ordre indiqué par le nombre de ces axes, on obtiendra le tableau suivant :

	NOMBRE DES AXES DE SYMÉTRIE				NOMBRE TOTAL des axes de symétrie.
	binaire.	ternaire.	quaternaire.	sénaire.	
Système terquaternaire.....	6	4	3	»	13
Système sénaire...........	6	»	»	1	7
Système quaternaire.......	4	»	1	»	5
Système ternaire..........	3	1	»	»	4
Système terbinaire.........	3	»	»	»	3
Système binaire...........	1	»	»	»	1
Système asymétrique.......	0	»	»	»	0

En terminant, M. Bravais établit divers théorèmes relatifs aux faces semblables ou plutôt similaires qui se trouvent échangées entre elles quand on fait tourner un système réticulaire autour de l'un quelconque des axes de symétrie.

Les Commissaires pensent que dans ce nouveau travail M. Bravais a donné de nouvelles preuves de la sagacité qu'il avait déjà montrée dans d'autres recherches. En conséquence, ils sont d'avis que le Mémoire soumis à leur examen est très-digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Rapport sur un Mémoire présenté par M. Bravais, *et intitulé :* Études sur la cristallographie (1).

(Commissaires : MM. Dufrénoy, Regnault, Lamé, Cauchy rapporteur.)

Dans un précédent Mémoire que l'Académie, adoptant les conclusions du Rapport présenté par six de ses Membres, a jugé très-digne de son approbation, M. Bravais avait considéré le système des points matériels avec lesquels coïncident, dans un cristal quelconque, les centres de gravité des diverses molécules. Partant de la remarque faite par divers auteurs, spécialement par M. Delafosse, que ces centres forment un *système réticulaire*, c'est-à-dire qu'ils se réduisent aux points suivant lesquels des plans équidistants et parallèles se trouvent coupés par deux autres séries de plans équidistants et parallèles, il avait compris la nécessité d'étudier avec beaucoup de soin la nature et les propriétés d'un système réticulaire quelconque, et des *réseaux* dont chacun a pour *nœuds* les points du système renfermés dans l'un des *plans réticulaires*. Il avait facilement reconnu que les trois séries de plans réticulaires partagent l'espace en *parallélipipèdes élémentaires* tous égaux entre eux, et que les nœuds d'un réseau donné sont en même temps les nœuds d'un nombre infini d'autres réseaux dont les *fils* se coupent suivant des angles divers, mais dont les *mailles* sont toujours équivalentes en surface aux mailles du premier; puis, en nommant *axe de symétrie* d'un système réticulaire une droite tellement choisie, qu'il suffise d'imprimer au système autour de cet axe une rotation mesurée par un certain angle pour substituer les divers nœuds les uns aux autres, il avait démontré que l'angle qui sert de mesure à la rotation doit être nécessairement égal, soit à un ou à deux droits, soit au tiers ou aux deux tiers d'un angle droit. Par suite, le rapport de la circonférence entière à l'arc qui

(1) Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 25 février 1851, t. XXXII, p. 284.

mesure la rotation ne pouvait être que l'un des nombres 2, 3, 4, 6; et la symétrie d'un système réticulaire devait être, suivant le langage adopté par M. Bravais, *binaire*, ou *ternaire*, ou *quaternaire*, ou *sénaire*. Enfin, après avoir établi ces principes, l'auteur avait observé qu'ils pouvaient être utilement appliqués à la classification des cristaux; et en classant les divers systèmes réticulaires, ou plutôt les systèmes de nœuds qu'ils peuvent offrir, d'après le nombre et la nature de leurs axes de symétrie, M. Bravais avait compté sept systèmes distincts, caractérisés par les axes de symétrie que nous avons mentionnés dans notre premier Rapport, savoir: les systèmes *terquaternaire*, *sénaire*, *quaternaire*, *ternaire*, *terbinaire* et *binaire*, et le système *asymétrique*, c'est-à-dire celui qui n'offre aucun axe de symétrie.

Dans le nouveau Mémoire dont nous avons à rendre compte, M. Bravais ne se borne plus à la recherche des propriétés du système réticulaire formé par les centres de gravité des molécules d'un cristal. Pénétrant plus avant dans les profondeurs de la science, il s'occupe aussi des diverses formes que peuvent offrir les molécules cristallines, et de l'influence que ces formes doivent exercer sur la cristallisation. Déjà, dans un Mémoire présenté à l'Académie le 31 août 1840, M. Delafosse avait signalé cette influence, et observé qu'elle suffit pour expliquer de *prétendues exceptions à la loi de symétrie, regardées comme des anomalies constantes dans certaines espèces minérales, telles que la pyrite, la boracite, la tourmaline, le quartz, etc.* Déjà, il avait insisté sur cette considération, que *deux parties d'un cristal géométriquement semblables peuvent avoir des structures ou constitutions moléculaires différentes, et que, dans ce cas, on ne peut plus dire qu'elles sont en tout point identiques.* Déjà le savant professeur, attribuant la formation des cristaux dits *hémiédriques* aux particularités qui caractérisent leur constitution moléculaire, avait cherché, par exemple, l'explication de l'hémiédrie de la boracite dans la forme tétraédrique de la molécule, et de l'hémiédrie du quartz dans une sorte de distorsion d'une molécule rhomboédrique. Mais en confirmant ce principe, que *la forme de la molécule exerce une influence notable sur la cristallisation*, M. Bravais arrive, en outre, à cette conclusion remarquable que, pour expliquer tous les phénomènes de l'hémiédrie, il suffit d'avoir égard à cette influence et aux effets qu'elle peut produire. Pour établir cette proposition, M. Bravais commence par examiner les divers genres de symétrie que peut offrir une molécule cristalline, considérée comme un système d'atomes, et représentée par un polyèdre dont ces atomes occupent les sommets; puis il recherche les lois suivant lesquelles la symétrie de la molécule se transmet en partie au système réticulaire, formé par les centres de gravité des diverses molécules dont un cristal se compose. Entrons, sur ces deux points, dans quelques détails.

M. Bravais observe d'abord qu'un polyèdre peut offrir trois éléments de symé-

trie, savoir : l'élément point ou *centre de symétrie*, l'élément ligne ou *axe de symétrie*, et l'élément plan ou *plan de symétrie*.

Le centre de symétrie d'un polyèdre est un point autour duquel les sommets, pris deux à deux, sont rangés sur des diagonales dont ce point est le milieu.

Une droite est un axe de symétrie d'un polyèdre, lorsqu'il suffit d'imprimer à celui-ci, autour de cette droite, une rotation mesurée par un certain angle pour substituer les divers sommets les uns aux autres. Le rapport de la circonférence au plus petit des arcs propres à mesurer la rotation est toujours un nombre entier qui détermine l'*ordre de symétrie de l'axe*. Mais ce rapport peut être l'un quelconque des nombres entiers supérieurs à l'unité; par suite, un polyèdre peut admettre, non-seulement comme les systèmes réticulaires, des axes de symétrie *binaire, ternaire, quaternaire* et *sénaire*, mais encore des axes de symétrie *quinaire, septénaire*, etc. Un même polyèdre peut d'ailleurs offrir des axes de symétrie de divers ordres. Deux axes de même ordre sont de *même espèce*, lorsqu'en les substituant l'un à l'autre on ne fait qu'échanger les sommets entre eux; ils sont d'*espèces différentes* dans le cas contraire. Dans un polyèdre donné, le nombre des diverses espèces d'axes de symétrie ne peut surpasser trois, mais il peut être égal à trois. Ainsi, par exemple, dans le cube, un axe de symétrie peut être ou l'axe binaire qui joint les milieux de deux arêtes opposées, ou l'axe ternaire qui représente une diagonale et qui joint deux sommets opposés, ou enfin l'axe quaternaire qui joint les centres de deux faces opposées et parallèles.

Enfin, un plan de symétrie, dans un polyèdre donné, sera un plan qui divisera le polyèdre en deux parties symétriques, les sommets étant situés deux à deux à égales distances du plan sur des droites qui lui seront perpendiculaires. D'ailleurs les plans de symétrie, comme les axes de symétrie, pourront être de *même espèce* ou d'*espèces différentes*; et, dans un polyèdre donné, le nombre des diverses espèces de plans de symétrie ne pourra surpasser trois, mais il pourra être égal à trois. Ainsi, par exemple, dans le polyèdre qui aurait pour sommets les sommets d'un hexagone régulier, et deux points situés à égales distances du plan de cet hexagone sur une perpendiculaire élevée par le centre, un plan de symétrie pourrait être ou un plan passant par cette perpendiculaire et par un sommet ou par le milieu d'un des côtés de l'hexagone, ou le plan même de l'hexagone dont il s'agit.

Cela posé, M. Bravais démontre les deux propositions suivantes :

S'il existe dans un polyèdre deux plans de symétrie, leur intersection sera nécessairement un axe de symétrie.

Un centre de symétrie, un plan de symétrie, et un axe de symétrie d'ordre pair, sont trois éléments tellement liés entre eux, que la présence de deux de ces éléments entraîne toujours la présence du troisième.

D'ailleurs, M. Bravais appelle *axe principal* celui qui, dans un polyèdre donné, est parallèle ou perpendiculaire à tous les axes ou plans de symétrie, et désigne, sous le nom de *sphéroédriques*, les polyèdres qui offrent plusieurs axes de symétrie, dont aucun n'est un axe principal.

Cela posé, M. Bravais fait voir que les polyèdres, considérés au point de vue de la symétrie, peuvent être divisés en vingt-trois classes, réparties entre six *groupes* distincts :

Le premier groupe comprend tous les polyèdres *asymétriques*, c'est-à-dire ceux qui ne possèdent ni axes, ni plans, ni centre de symétrie;

Le deuxième groupe comprend tous les polyèdres symétriques, mais dépourvus d'axes de symétrie;

Le troisième groupe, les polyèdres symétriques pourvus d'un axe principal d'ordre pair;

Le quatrième groupe, les polyèdres symétriques pourvus d'un axe principal d'ordre impair;

Le cinquième groupe, des polyèdres sphéroédriques à quatre axes ternaires;

Et le sixième groupe, les polyèdres sphéroédriques à dix axes ternaires.

Après avoir étudié les divers genres de symétrie que peuvent offrir, d'une part, les systèmes réticulaires, d'autre part, les polyèdres qui représentent les molécules des corps, et classé les uns et les autres d'après le nombre et la nature de leurs éléments de symétrie, il restait à examiner comment et jusqu'à quel degré la symétrie d'une molécule peut être transmise par la cristallisation au système réticulaire formé par les centres de gravité des diverses molécules dont se compose un cristal. En d'autres termes, il s'agissait de résoudre le problème suivant :

Les éléments de symétrie d'une molécule étant donnés, déterminer le système cristallin que la réunion de cette molécule à d'autres de même espèce produira au moment de la cristallisation.

M. Bravais observe, à ce sujet, que la cristallisation a pour effet d'amener les diverses molécules à des positions telles, qu'il y ait équilibre, et même un équilibre stable, entre les actions exercées par les unes sur les autres. Cela posé, il fait voir que l'équilibre s'établira plus facilement dans un cristal en voie de formation, si les centres de gravité des molécules se disposent de manière que les axes et plans de symétrie de ces molécules, indéfiniment prolongés, deviennent des axes et plans de symétrie du système réticulaire formé par les centres de gravité. Il se trouve ainsi autorisé à poser la règle suivante :

Parmi les sept systèmes cristallins, les molécules d'une substance donnée adopteront celui dont la symétrie offre le plus grand nombre d'éléments communs avec la symétrie propre au polyèdre moléculaire.

Si plusieurs systèmes cristallins peuvent, en vertu de la règle énoncée, correspondre à une même molécule, ceux qui offriront un plus grand nombre d'éléments de symétrie seront en général compris parmi les autres comme cas particuliers; ils seront donc en nombre moindre, et indiqués avec une probabilité incomparablement plus faible. M. Bravais se trouve ainsi amené à énoncer encore la règle suivante :

Dans le cas où plusieurs systèmes cristallins auraient les mêmes éléments de symétrie communs avec un même polyèdre moléculaire, la cristallisation s'opérera suivant le système de moindre symétrie, c'est-à-dire suivant le système qui laissera le plus grand nombre de termes indéterminés parmi les six éléments constitutifs de son parallélipipède élémentaire.

L'emploi des deux règles générales que nous venons de rappeler permet à M. Bravais, non-seulement d'expliquer les divers phénomènes d'hémiédrie observés par les cristallographes, mais encore de déterminer les lois de ces phénomènes et les circonstances dans lesquelles ils doivent se présenter; et ces lois et ces circonstances sont précisément celles que fournit l'observation elle-même. C'est encore avec le même bonheur, qu'après avoir déduit de ses recherches antérieures sur les systèmes réticulaires, la détermination de ce qu'on appelle la *forme cristalline* (1), c'est-à-dire du système des faces similaires que présente un cristal, M. Bravais applique son analyse à la réduction du nombre de ces faces, produite par l'hémiédrie. Il fait voir aussi qu'on peut expliquer, par sa théorie, un assez grand nombre de cas de dimorphisme, sans être obligé d'altérer la structure interne des molécules.

En résumé, les Commissaires sont d'avis que le travail soumis à leur examen offre de nouvelles preuves de la sagacité que M. Bravais avait montrée dans ses précédentes recherches, et que ce travail contribue notablement aux progrès de la Cristallographie. Ils pensent, en conséquence, que le nouveau Mémoire de M. Bravais est très-digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

---

(1) Parmi les théorèmes établis à ce sujet par M. Bravais, nous nous bornerons à rappeler le suivant :

« Quand une face de la forme cristalline n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à un axe de symétrie, le nombre des faces qui composent la forme est double de la somme

$$1 + N_2 + 2N_3 + 3N_4 + 5N_6,$$

» N_2, N_3, N_4, N_6 étant les nombres d'axes binaires, ternaires, quaternaires et sénaires que possède le système. »

TABLE DES MATIÈRES.

RAPPORTS A L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

